INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XIX. BAND VIERTES UND FÜNFTES HEFT 1951

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 16.40

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford, Calif., 621 Alvarado Row

Professor **K. v. Sanden**, Karlsruhe-Land 1, Rosmarinstraße 11

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8a

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70 u. 32 64 46

Vertriebsvertretung im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

Inhalt:

Seite

Heilig, R., Torsions- und Biegeschwingungen von dünnwandigen Trägern mit beliebiger offener Profilform mit Vorlasten. Mit 14 Textabbildungen 231

Münz, H., Ein Integrationsverfahren für die Berechnung der Biegespannungen achsensymmetrischer Schalen unter achsensymmetrischer Belastung. II. Mit 15 Textabbildungen 255

Pieruschka, E., Stoffgesetze und Wellen zähelastischer, isotroper Medien . 271

Müller, W., Längsbewegung eines Rotationskörpers in der Flüssigkeit. Mit 14 Textabbildungen 282

Ludwieg, H., Die ausgebildete Kanalströmung in einem rotierenden System. Mit 6 Textabbildungen 296

Strscheletzky, M., Strömung im Übergangsraum der Wasserturbinen. Mit 6 Textabbildungen 309

INGENIEUR-ARCHIV

XIX. BAND VIERTES UND FÜNFTES HEFT 1951

Torsions- und Biegeschwingungen von dünnwandigen Trägern mit beliebiger offener Profilform mit Vorlasten.

Von **R. Heilig** in Dortmund.

Einleitung. Seit den Versuchen von *C. Bach* ist bekannt, daß Stäbe von nichtsymmetrischem Profil durch im Schwerpunkt angreifende Querkräfte nicht nur gebogen, sondern auch tordiert werden. Eine ähnliche Erscheinung gibt es in der Stabilitätstheorie, wo beim Drehknicken (Drillknicken)[1] ein gerader Stab von unsymmetrischer Profilform unter der kritischen Last ausbiegt und gleichzeitig ausdreht. Schwingungserscheinungen solcher Stäbe sind indessen noch nicht untersucht worden[2]. Die Arbeit[3] gibt eine strenge Elastizitätstheorie des dünnwandigen Stabes von beliebiger offener Querschnittsform und damit eine Grundlage zur Berechnung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen solcher Stäbe, auch wenn sie durch Vorlasten (Druckkraft, Biegemomente, exzentrisch sitzende Massen) beansprucht sind. Als Anwendungen werden die folgenden Beispiele behandelt: der Träger mit symmetrischem, einfachsymmetrischem und unsymmetrischem Profil (geometrische Kopplung), sowie der Träger unter der Wirkung eines konstanten Biegemomentes und einer exzentrisch angreifenden gleichförmigen Querlast (mechanische Kopplung).

I. Elastizitätstheorie des dünnwandigen Trägers von beliebiger offener Profilform.

1. Schnittkräfte. a) Bezugssysteme; äußere Kräfte und Verschiebungen. Für die Behandlung des gekennzeichneten Problems benützen wir zwei rechtshändige orthogonale Koordinatensysteme $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ und x, y, z, die im unbelasteten Stabe zusammenfallen. Das System $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ mit den drei Einheitsvektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ ist raumfest ($\mathfrak{i}$ in Richtung der unverformten geraden Stabachse, $\mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ in Richtung zweier auf $\mathfrak{i}$ senkrechter Achsen, z. B. der Trägheitshauptachsen des Querschnitts); das System x, y, z mit den Vektoren $\mathfrak{t}, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2$ ist körperfest ($\mathfrak{t}$ in Richtung der Tangente an die verformte Stabachse; entsprechend $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2$).

Der Träger sei beliebig durch äußere Einzelkräfte und Einzelmomente belastet, außerdem durch eine verteilte Last

$$\mathfrak{p} = p_T\,\mathfrak{i} + p_1\,\mathfrak{j} + p_2\,\mathfrak{k}\,, \tag{1}$$

die an einem Hebelarm (Abstand vom Schwerpunkt, körperfest)

$$\mathfrak{e} = e_1\mathfrak{n}_1 + e_2\mathfrak{n}_2 \tag{2}$$

angreift, sowie durch verteilte Momente

$$\mathfrak{m} = m_T\,\mathfrak{i} + m_1\,\mathfrak{j} + m_2\,\mathfrak{k}\,. \tag{3}$$

Die statischen Größen an der Stelle x sind dann eine durch den Schwerpunkt gehende Kraft

$$\hat{\mathfrak{N}} = \hat{N}\,\mathfrak{i} + (\hat{Q}_y\,\mathfrak{j} + \hat{Q}_z\,\mathfrak{k}) = \hat{\mathfrak{E}} + \hat{\mathfrak{Q}}$$

und ein Moment (4)

$$\hat{\mathfrak{M}} = \hat{M}_T\cdot\mathfrak{i} + (\hat{M}_y\,\mathfrak{j} + \hat{M}_z\,\mathfrak{k}) = \hat{\mathfrak{M}}_T + \hat{\mathfrak{M}}_b\,.$$

Von $\hat{\mathfrak{N}}$ und $\hat{\mathfrak{M}}$ setzen wir voraus, daß sie bei der Deformation Richtung und Größe beibehalten sollen. Es gelten dann unabhängig vom Verformungszustand für das Stabelement die Gleich-

---

[1] Siehe *R. Kappus*, Luftfahrt-Forsch. (1937), S. 444 bzw. DVL-Jahrb. (1937), S. 200.

[2] Nach Abschluß dieser Arbeit wurden dem Verfasser zwei Veröffentlichungen bekannt, die sich ebenfalls mit dem Schwingungsproblem von Trägern mit nichtsymmetrischer Profilform befassen: *K. Federhofer*, S.-B. Akad. Wiss. Wien Bd. 156 (1947), S. 393; *E. Chwalla*, Österr. Bauz. 5 (1950), S. 1.

[3] Gekürzte Darmstädter Dissertation; Referent Prof. Dr.-Ing. *K. Marguerre*, Korreferent Prof. Dr.-Ing. *K. Karas*.

gewichtsaussagen (Abb. 1)

$$\frac{d\hat{\mathfrak{R}}}{dx} + \mathfrak{p} = 0\,, \qquad \frac{d\hat{\mathfrak{M}}}{dx} + \mathfrak{i} \times \hat{\mathfrak{R}} + \mathfrak{e} \times \mathfrak{p} + \mathfrak{m} = 0\,. \tag{5}$$

Wir setzen abkürzend $\mathfrak{e} \times \mathfrak{p} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^*$, so daß in Komponentenform gilt

$$\left.\begin{aligned} \hat{N}' + p_T &= 0\,, & \hat{M}_T' + m_T^* &= 0\,, \\ \hat{Q}_y' + p_1 &= 0\,, & \hat{M}_y' - \hat{Q}_z + m_1^* &= 0\,, \\ \hat{Q}_z' + p_2 &= 0\,, & \hat{M}_z' + \hat{Q}_y + m_2^* &= 0 \end{aligned}\right| \tag{6}$$

mit

$$m_T^* = m_T + e_1 p_2 - e_2 p_1\,, \quad m_1^* = m_1 + e_2 p_T\,, \quad m_2^* = m_2 - e_1 p_T\,.$$

Durch Integration ergibt sich daraus für die äußere Kräfte- und Momentenverteilung

$$\left.\begin{aligned} \hat{N} &= \hat{N}(0) - \int_0^x p_T\, dx'\,, & \hat{M}_T &= \hat{M}_T(0) - \int_0^x m_T^*\, dx'\,, \\ \hat{Q}_y &= \hat{Q}_y(0) - \int_0^x p_1\, dx'\,, & \hat{M}_y &= \hat{M}_y(0) + \hat{Q}_z(0)\, x - \int_0^x p_2 (x - x')\, dx' - \int_0^x m_1^*\, dx'\,, \\ \hat{Q}_z &= \hat{Q}_z(0) - \int_0^x p_2\, dx'\,, & \hat{M}_z &= \hat{M}_z(0) - \hat{Q}_y(0)\, x + \int_0^x p_1 (x - x')\, dx' + \int_0^x m_2^*\, dx'\,. \end{aligned}\right| \tag{7}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (5) können, wenn der Einfluß der Stabverformung auf das Kräftegleichgewicht vernachlässigt wird, unmittelbar mit den inneren elastischen Kräften in Verbindung gebracht werden; bei Berücksichtigung des Verformungseinflusses erst dann, wenn der Zusammenhang zwischen den $\hat{N}, \ldots \hat{M}z$ und den vom verformten Stab übertragenen Kräften und Momenten, die wir später [Gleichungen (23′)] mit $N, \ldots M_z$ bezeichnen, bekannt ist. Um diesen Zusammenhang herzustellen, müssen wir auf die Geometrie des verformten Stabes eingehen. Wir können uns dabei auf „kleine" Verschiebungsgrößen beschränken; denn weder in der Schwingungs- noch in der Stabilitätstheorie braucht man die Quadrate der Verschiebungsableitungen mitzunehmen (obwohl man die Gleichgewichtsbedingungen bei Stabilitätsproblemen natürlich für das verformte Element ansetzen muß[1]).

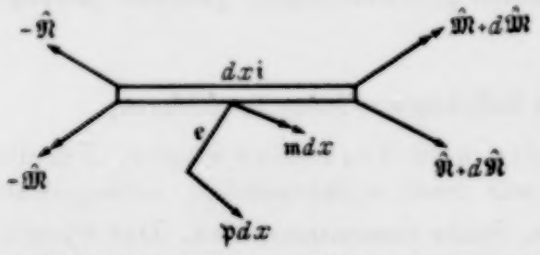

Abb. 1. Gleichgewicht am unverformten Stabelement.

Als Folge der auf ihn einwirkenden Kräfte erleidet der Stab eine Schwerpunktsverschiebung

$$\mathfrak{w} = u\,\mathfrak{t} + (v\,\mathfrak{n}_1 + w\,\mathfrak{n}_2) = \mathfrak{u} + \mathfrak{v} \tag{8}$$

und eine Drehung um die Stablängsachse $\mathfrak{d}_T = \chi\,\mathfrak{t}$. Bei Beschränkung auf kleine Verschiebungsgrößen ist der Gesamtvektor der Drehung

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_T + \mathfrak{d}_v = \chi\,\mathfrak{t} - w'\,\mathfrak{n}_1 + v'\,\mathfrak{n}_2 \tag{9}$$

und der zugehörige Krümmungsvektor $\vec{\varkappa}$ wegen[2] $\vec{\varkappa} = \mathfrak{d}'$

$$\vec{\varkappa} = \chi'\,\mathfrak{t} - w''\,\mathfrak{n}_1 + v''\,\mathfrak{n}_2\,. \tag{10}$$

Zwischen den raum- und den körperfesten Vektoren $\mathfrak{i}, \ldots, \mathfrak{t}, \ldots$ besteht der Zusammenhang (*Euler*sche Formeln)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{i} &= \mathfrak{t} - \mathfrak{d} \times \mathfrak{t}\,, \\ \mathfrak{j} &= \mathfrak{n}_1 - \mathfrak{d} \times \mathfrak{n}_1\,, \\ \mathfrak{k} &= \mathfrak{n}_2 - \mathfrak{d} \times \mathfrak{n}_2\,. \end{aligned}\right| \tag{11}$$

[1] Wenn man die Grundgleichungen statt durch Gleichgewichtsbetrachtungen aus der Energieformel gewinnen will, spielen die Quadrate üblicherweise herein. Wir werden aber in Ziff. 3 einen Weg einschlagen, der auch da die Berechnung der quadratischen Terme umgeht.

[2] Gilt auch für den von Hause aus krummen Stab. Siehe *K. Marguerre*, Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 222.

Für die Komponenten gelten daher die Transformationsbeziehungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{i} &= \mathfrak{t} \quad - v'\mathfrak{n}_1 - w'\mathfrak{n}_2 , \\ \mathfrak{j} &= v'\mathfrak{t} + \mathfrak{n}_1 \quad - \chi\mathfrak{n}_2 , \\ \mathfrak{k} &= w'\mathfrak{t} + \chi\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} \mathfrak{t} &= \mathfrak{i} + v'\mathfrak{j} + w'\mathfrak{k} , \\ \mathfrak{n}_1 &= -v'\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \chi\mathfrak{k} , \\ \mathfrak{n}_2 &= -w'\mathfrak{i} - \chi\mathfrak{j} + \mathfrak{k} . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Vektoren $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ haben bis auf Glieder zweiter Ordnung den Betrag 1. Ihre Ableitungen, die wir im weiteren noch benötigen, sind nach (11) unter Beachtung von (10)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \vec{\varkappa} \times \mathfrak{t} \;\; = v''\mathfrak{n}_1 \;\; + w''\mathfrak{n}_2 , \\ \mathfrak{n}_1' &= \vec{\varkappa} \times \mathfrak{n}_1 = -v''\mathfrak{t} + \chi'\mathfrak{n}_2 , \\ \mathfrak{n}_2' &= \vec{\varkappa} \times \mathfrak{n}_2 = -w''\mathfrak{t} - \chi'\mathfrak{n}_1 . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die Beziehungen (8) bis (10) geben den Verformungszustand der Schwerachse an. Die Drehung $\mathfrak{d}_T$ (9) bewirkt aber eine von Ort zu Ort veränderliche Verschraubung der Längsfasern, so daß sich die Querverschiebung $\mathfrak{v}_A$ eines Punktes A mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r} = y\mathfrak{n}_1 + z\mathfrak{n}_2$ um eine Größe $\mathfrak{v}_T = \mathfrak{d}_T \times \mathfrak{r}$ von der Schwerpunktsverschiebung $\mathfrak{v}$ unterscheidet. Die Gesamtquerverschiebung von A ist also

$$\mathfrak{v}_A = \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_T = (v - z\chi)\mathfrak{n}_1 + (w + y\chi)\mathfrak{n}_2 \equiv v_A\mathfrak{n}_1 + w_A\mathfrak{n}_2 . \tag{14}$$

Als Folge der Verwindung sind die Richtungen der Stabfasern von den Querschnittskoordinaten abhängig. Die Faserrichtungen werden am einfachsten durch die von *Trefftz* eingeführten „Gittervektoren"

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}_x &= \left(1 + \frac{\partial u_A}{\partial x}\right)\mathfrak{i} + \frac{\partial v_A}{\partial x}\mathfrak{j} + \frac{\partial w_A}{\partial x}\mathfrak{k} , \\ \mathfrak{g}_y &= \frac{\partial u_A}{\partial y}\mathfrak{i} + \left(1 + \frac{\partial v_A}{\partial y}\right)\mathfrak{j} + \frac{\partial w_A}{\partial y}\mathfrak{k} , \\ \mathfrak{g}_z &= \frac{\partial u_A}{\partial z}\mathfrak{i} + \frac{\partial v_A}{\partial z}\mathfrak{j} + \left(1 + \frac{\partial w_A}{\partial z}\right)\mathfrak{k} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

festgelegt[1]. [Gittervektoren sind nach ihrer Definition (15) i.a. nichtorthogonale Vektoren, die in die Richtungen der drei verformten Kanten eines ursprünglich rechtwinkligen Parallelepipeds von der Kantenlänge 1 fallen und ihrem Betrage nach mit der verformten Kantenlänge übereinstimmen.] Setzen wir die Gleitungen in der Profilmittellinie null:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v_A}{\partial x} + \frac{\partial u_A}{\partial y} = 0 , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v_A}{\partial z} + \frac{\partial w_A}{\partial y} = 0 , \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w_A}{\partial x} + \frac{\partial u_A}{\partial z} = 0 , \tag{16}$$

was für offene Profile auch, wie sich zeigen wird, bei überlagerter Wölbkrafttorsion immer zulässig ist, dann wird $\frac{\partial u_A}{\partial y} = -\frac{\partial v_A}{\partial x}$ ... Damit, und bei Vernachlässigung der Dehnungen $\frac{\partial u_A}{\partial x}$, $\frac{\partial v_A}{\partial y}$, $\frac{\partial w_A}{\partial z}$ gegen 1 gehen die Gleichungen (15), wenn wir darin (12) und (14) einsetzen, über in

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}_x &= \mathfrak{t} - z\chi'\mathfrak{n}_1 + y\chi'\mathfrak{n}_2 , \\ \mathfrak{g}_y &= z\chi'\mathfrak{t} + \mathfrak{n}_1 , \\ \mathfrak{g}_z &= -y\chi'\mathfrak{t} + \mathfrak{n}_2 . \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ein Flächenelement $\vec{dF}$ des Querschnitts in einer Stelle x, y, z ist somit nach der Verformung festgelegt durch

$$\vec{dF} = dy\,\mathfrak{g}_y \times \mathfrak{g}_z\,dz = dy\,dz\,(\mathfrak{t} - z\chi'\mathfrak{n}_1 + y\chi'\mathfrak{n}_2) ;$$

das bedeutet, daß die Flächennormale in einem Punkt $A(y, z)$ auf Grund der ersten Gleichung (17) mit dem Gittervektor $\mathfrak{g}_x$ übereinstimmt und daß $\mathfrak{g}_x$ selbst [als Folge von (16)] senkrecht auf $\mathfrak{g}_y$, $\mathfrak{g}_z$ steht. Die Flächennormale hat demnach wegen der Veränderlichkeit von $\mathfrak{g}_x$ eine über den Querschnitt veränderliche Richtung, der Querschnitt ist nicht mehr eben, sondern (infolge der Verwindung) „verwölbt".

[1] *E. Trefftz*, Z. angew. Math. Mech. Bd. 13 (1933), S. 160.

b) Zusammenhang zwischen äußeren Kräften und Schnittkräften. Der Kraftvektor $\hat{\mathfrak{R}}$ und der Momentenvektor $\hat{\mathfrak{M}}$ in einer Schnittstelle x des Stabes behalten nach Voraussetzung bei der Deformation Größe und Richtung im Raum bei. Man muß aber, um das Elastizitätsgesetz in die Rechnung einführen zu können, Kräfte und Momente nach der Deformation nicht auf das raumfeste, sondern auf das körpereigene System beziehen und $\hat{\mathfrak{R}}$, $\hat{\mathfrak{M}}$ nach den Richtungen $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ zerlegen. Die so erhaltenen Größen seien $\overline{\mathfrak{R}}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$, wir bezeichnen sie als die Schnittkräfte und die Schnittmomente des Stabes und definieren ihre Komponenten durch

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{R}} &= \overline{N}\,\mathfrak{t} + \overline{Q}_y\,\mathfrak{n}_1 + \overline{Q}_z\,\mathfrak{n}_2\,, \\ \overline{\mathfrak{M}} &= \overline{M}_T\,\mathfrak{t} + \overline{M}_y\,\mathfrak{n}_1 + \overline{M}_z\,\mathfrak{n}_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$\overline{\mathfrak{R}}$ stimmt, da die äußeren Lasten bei der Deformation Richtung und Größe beibehalten, mit $\hat{\mathfrak{R}}$ überein. Dagegen unterscheiden sich $\hat{\mathfrak{M}}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ voneinander (Abb. 2): Da das Differential $d\hat{\mathfrak{R}}$, das nach (5) bekannt ist, die Änderung von $\hat{\mathfrak{R}}$ bei Fortschreiten um ein Längenelement dx in Richtung i bedeutet, greift der Kraftvektor $\overline{\mathfrak{R}} + d\hat{\mathfrak{R}}$ an der Stelle $x + dx$ nicht im Punkt S der verformten Schwerpunktsfaser an, sondern in einem gegen diesen um das Differential $d\mathfrak{v}$ verschobenen Punkt S'. Dadurch entsteht ein zusätzliches Kräftepaar $d\mathfrak{v} \times \hat{\mathfrak{R}}$, das zusammen mit $d\overline{\mathfrak{M}}$ den Zuwachs $d\hat{\mathfrak{M}}$ der vorgegebenen äußeren Momentenverteilung ergibt, also

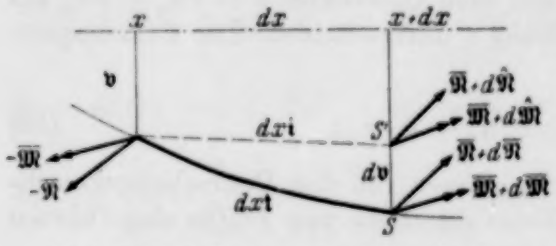

Abb. 2. Schnittkräfte am verformten Stabelement.

$$d\hat{\mathfrak{M}} = d\overline{\mathfrak{M}} + d\mathfrak{v} \times \hat{\mathfrak{R}} \tag{19}$$

und nach partieller Integration

$$\hat{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}} + \mathfrak{v} \times \hat{\mathfrak{R}} - \int_0^x \mathfrak{v} \times d\hat{\mathfrak{R}}\,. \tag{19'}$$

$d\hat{\mathfrak{R}}$ ersetzen wir mittels (5) durch die äußere Last $\mathfrak{p}\,dx$, müssen dabei aber beachten, daß $\mathfrak{p}$ nicht wie die Schnittkraft $\hat{\mathfrak{R}}$ im Schwerpunkt, sondern im Punkt $E(e_1, e_2)$ angreift, der die von $\mathfrak{v}$ verschiedene Verschiebung

$$\mathfrak{v}_E = \mathfrak{v} + \mathfrak{d} \times \mathfrak{e} = -(e_1 v' + e_2 w')\,\mathfrak{t} + (v - e_2\chi)\,\mathfrak{n}_1 + (w + e_1\chi)\,\mathfrak{n}_2 \tag{20}$$

erleidet. Es geht also $\mathfrak{v} \times d\hat{\mathfrak{R}}$ über in $-\mathfrak{v}_E \times \mathfrak{p}\,dx$.

Die Schnittkomponenten (18) folgen so schließlich aus

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{R}} &= \hat{\mathfrak{R}}\,, \\ \overline{\mathfrak{M}} &= \hat{\mathfrak{M}} - \mathfrak{v} \times \hat{\mathfrak{R}} - \int \mathfrak{v}_E \times \mathfrak{p}\,dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Dieselben Formeln ergeben sich auch aus einer Gleichgewichtsbetrachtung an einem verformten Stababschnitt von der Länge x.) Mit Hilfe von (4), (8) und (12) erhalten wir durch Komponentenzerlegung für die Schnittkräfte

$$\left.\begin{aligned} \overline{N} &= \hat{N} + \hat{Q}_y\,v' + \hat{Q}_z\,w'\,, \\ \overline{Q}_y &= -\hat{N}v' + \hat{Q}_y + \hat{Q}_z\,\chi\,, \\ \overline{Q}_z &= -\hat{N}\,w' - \hat{Q}_y\,\chi + \hat{Q}_z \end{aligned}\right\} \tag{21a}$$

und für die Schnittmomente

$$\left.\begin{aligned} \overline{M}_T &= \hat{M}_T + \hat{M}_y\,v' + \hat{M}_z\,w' + \hat{Q}_y\,w - \hat{Q}_z\,v - \int p_2\,(v - e_2\chi)\,dx + \int p_1\,(w + e_1\chi)\,dx, \\ \overline{M}_y &= -\hat{M}_T\,v' + \hat{M}_y + \hat{M}_z\chi - \hat{N}\,w - \int p_T\,(w + e_1\chi)\,dx - \int p_2\,(e_2\,w' + e_1\,v')\,dx\,, \\ \overline{M}_z &= -\hat{M}_T\,w' - \hat{M}_y\chi + \hat{M}_z + \hat{N}\,v + \int p_T\,(v - e_2\chi)\,dx + \int p_1(e_2\,w' + e_1\,v')\,dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{21b}$$

Die $\overline{\mathfrak{R}}$, $\overline{\mathfrak{M}}$ werden in einer Schnittstelle durch über den Querschnitt verteilte Spannungen, die in die Richtungen $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ fallenden „Schnittspannungen", übertragen. Von diesen unterscheiden wir die „Faserspannungen" als die Spannungskomponenten, die in die Richtungen $\mathfrak{g}_x$,

$\mathfrak{g}_y$, $\mathfrak{g}_z$ der Längs- und Querachsen eines verwundenen im Punkt A gelegenen Faserelements fallen und die unmittelbar mit den örtlichen Dehnungen und Gleitungen zusammenhängen. Die Längsspannungen (in Richtung $\mathfrak{g}_x$) bezeichnen wir mit σ_x, die Schubspannungen (in Richtung $\mathfrak{g}_y$, $\mathfrak{g}_z$) mit τ_y, τ_z. Für den Spannungsvektor $\mathfrak{s}_a$ in A gilt demnach

$$\mathfrak{s}_a = \sigma_x \mathfrak{g}_x + \tau_y \mathfrak{g}_y + \tau_z \mathfrak{g}_z \,. \tag{22}$$

Wenn wir andererseits durch

$$\mathfrak{s}_a = \bar{\sigma}_x \mathfrak{t} + \bar{\tau}_y \mathfrak{n}_1 + \bar{\tau}_z \mathfrak{n}_2 \tag{22'}$$

die Schnittspannungskomponenten $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_y$, $\bar{\tau}_z$ definieren, so folgt mit (17)

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \sigma_x - (\tau_z y - \tau_y z)\,\chi' \,, \\ \bar{\tau}_y &= \tau_y - \sigma_x z \chi' \,, \\ \bar{\tau}_z &= \tau_z + \sigma_x y \chi' \,. \end{aligned}\right\} \tag{22''}$$

Die Schnittspannungen unterscheiden sich also von den Faserspannungen um Größen, die von der Verwindung des Stabes abhängen. Ebenso unterscheiden sich ihre Resultanten, die Schnittkräfte und Schnittmomente

$$\left.\begin{aligned} \bar{N} &= \int \bar{\sigma}_x \, dF, & \bar{Q}_y &= \int \bar{\tau}_y \, dF, & \bar{Q}_z &= \int \bar{\tau}_z \, dF \,, \\ \bar{M}_T &= \int (\bar{\tau}_z y - \bar{\tau}_y z)\, dF, & \bar{M}_y &= \int z \bar{\sigma}_x \, dF, & \bar{M}_z &= -\int y \bar{\sigma}_x \, dF, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

von den durch die σ_x, τ_y, τ_z in einem Schnitt übertragenen Kräften N, Q_y, Q_z und Momenten M_T, M_y, M_z, die definiert sind durch

$$\left.\begin{aligned} N &= \int \sigma_x \, dF, & Q_y &= \int \tau_y \, dF \,, & Q_z &= \int \tau_z \, dF, \\ M_T &= \int (\tau_z y - \tau_y z)\, dF, & M_y &= \int z \sigma_x \, dF, & M_z &= -\int y \sigma_x \, dF. \end{aligned}\right\} \tag{23'}$$

Der Zusammenhang zwischen den $\hat{N}$, $\bar{N}$, N, ... $\hat{M}_z$, $\bar{M}_z$, M_z läßt sich nun leicht herstellen: Aus (23) und (22'') folgt mit (23') und den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} L_T &= \int \sigma_x (y^2 + z^2)\, dF \,, \\ L_y &= \int z(\tau_z y - \tau_y z)\, dF \,, \\ L_z &= -\int y(\tau_z y - \tau_y z)\, dF \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

sofort

$$\left.\begin{aligned} \bar{N} &= N - M_T \chi' \,, \\ \bar{Q}_y &= Q_y - M_y \chi' \,, \\ \bar{Q}_z &= Q_z - M_z \chi' \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} \bar{M}_T &= M_T + L_T \chi' \,, \\ \bar{M}_y &= M_y - L_y \chi' \,, \\ \bar{M}_z &= M_z - L_z \chi' \,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Da wir nur lineare Glieder in χ' beibehalten, lautet die Auflösung dieser Gleichungen nach N, ... M_z

$$\left.\begin{aligned} N &= \bar{N} + \bar{M}_T \chi' \,, \\ Q_y &= \bar{Q}_y + \bar{M}_y \chi' \,, \\ Q_z &= \bar{Q}_z + \bar{M}_z \chi' \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} M_T &= \bar{M}_T - \bar{L}_T \chi' \,, \\ M_y &= \bar{M}_y + \bar{L}_y \chi' \,, \\ M_z &= \bar{M}_z + \bar{L}_z \chi' \,, \end{aligned}\right\} \tag{25a, b}$$

worin die $\bar{L}$ analog zu (24) definiert sind. Fassen wir (25') und (21a, b) zusammen, so haben wir die an einer Stabstelle x übertragenen Längs- und Querkräfte, Torsions- und Biegemomente, ausgedrückt in den vorgegebenen äußeren Lasten. Die N, ... M_z hängen, im Gegensatz zu den $\hat{N}$, ... $\hat{M}_z$ von den Formänderungen ab. Bei Stabilitätsproblemen z. B. ist es wichtig, auf diesen Unterschied zu achten.

Wir gehen noch kurz auf die Integrale (24) ein. Um das erste Integral auszuwerten, setzen wir für σ_x an[1]

$$\sigma_x = \sigma_0 + \alpha z + \beta y \,,$$

[1] Die Abweichungen dieses linearen Ansatzes von der wirklichen Verteilung bilden eine Eigenkraftgruppe (Kräftegruppe ohne Resultierende und ohne resultierendes Moment). Diese Anteile sind aber i. a. klein gegenüber den Biege- und Längskraftanteilen und können in einem Korrekturglied (L_T ist mit χ' multipliziert) wegbleiben.

dann ist auf Grund der Definitionsgleichungen (23′)

$$\sigma_o = \frac{N}{F}\,, \qquad \alpha = \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}\,, \qquad \beta = -\frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}\,.$$

Aus (24) erhält man damit

$$L_T = N i_p^2 + b_y M_y + b_z M_z\,, \tag{26}$$

wobei die mit den Abkürzungen $B_y = \int\limits_{(F)} z\,(y^2 + z^2)\,dF$, $B_z = -\int\limits_{(F)} y\,(y^2 + z^2)\,dF$ gebildeten Größen

$$b_y = \frac{B_y I_z + B_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}\,, \qquad b_z = \frac{B_z I_y + B_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \tag{26′}$$

Querschnittsfunktionen von der Dimension einer Länge sind[1]. ($i_p = \sqrt{I_p/F}$ bezeichnet den polaren Trägheitsradius des Stabes.)

Zur Berechnung der L_y, L_z schreiben wir

$$L_y = \int z\,dM_T\,, \qquad L_z = -\int y\,dM_T \tag{27}$$

und führen darin nach einer bekannten Formel der Torsionstheorie $dM_T = 2\,T\,dF$ ein:

$$L_y = 2\int z\,T\,dF\,, \qquad L_z = -2\int y\,T\,dF\,. \tag{28}$$

T ist die Torsionsfunktion, die für offene Profile durch

$$T = \frac{M_T}{I_T}\left(\frac{t^2}{4} - n^2\right) \tag{29}$$

gegeben ist; I_T bezeichnet den Torsionswiderstand, der für offene Profile $= \frac{1}{3}\int t^3\,ds$ ist. [Der Querkraftanteil der τ kann hier ohne Bedenken vernachlässigt werden, da ein Stab an „großen" Schubbeanspruchungen nur Torsionsmomente aufnimmt.] Integration von (28) führt so schließlich mit Hilfe von (29) auf

$$L_y = c_y\,M_T\,, \qquad L_z = c_z\,M_T\,. \tag{30}$$

Die c_y, c_z sind, wie die b_y, b_z, Querschnittsfunktionen von der Dimension einer Länge:

$$c_y = \frac{\int z\,t^3\,ds}{\int t^3\,ds}\,, \qquad c_z = -\frac{\int y\,t^3\,ds}{\int t^3\,ds}\,. \tag{30′}$$

Für den Sonderfall einer über die gesamte Profilabwicklung konstanten Wandstärke t werden die L_y, L_z wegen $\int y\,ds = \int z\,ds = 0$ zu Null. Die Torsionsschubspannungen haben in diesem Fall keinen Einfluß auf das Biegemoment, aber auch bei $\frac{dt}{ds} \neq 0$ ist er natürlich geringfügig.

c) Gleichgewichtsbedingungen am Element. Nachdem mit (21) und (25) der Zusammenhang zwischen den vorgegebenen äußeren Lasten und dem vom verformten Stab übertragenen Kräften und Momenten gefunden wurde, ist es nicht schwierig, die Gleichgewichtsbedingungen (5) in den $N, \ldots M_z$ auszudrücken. Wir lösen (21) und (25) nach $\hat{N}, \ldots \hat{M}_z$ auf und erhalten dann nach Einführen in die Komponentengleichungen (6) und geeigneter Zusammenfassung:
für die Kräfte

$$\left.\begin{aligned} N' - (\hat{Q}_y v')' - (\hat{Q}_z w')' - (\hat{M}_T \chi)'' - (m_T^* \chi)' + p_T = 0\,, \\ Q'_y + (\hat{N} v')' - (\hat{M}_y \chi)'' - (m_1^* \chi)' + p_1 = 0\,, \\ Q'_z + (\hat{N} w')' - (\hat{M}_z \chi)'' - (m_2^* \chi)' + p_2 = 0 \end{aligned}\right| \tag{31}$$

für die Momente

$$\left.\begin{aligned} M'_T - (\hat{M}_y v')' - (\hat{M}_z w')' - \hat{Q}_y w' + \hat{Q}_z v' + (\hat{L}_T \chi')' + (p_1 e_1 + p_2 e_2)\,\chi + m_T^* = 0\,, \\ M'_y + (\hat{M}_T v')' - (\hat{L}_y \chi')' + p_T e_1 \chi + p_2 (e_2 w' + e_2 v') + m_2^* \chi + m_1^* - Q_z = 0\,, \\ M'_z + (\hat{M}_T w')' - (\hat{L}_z \chi')' + p_T e_2 \chi + p_1 (e_2 w' + e_1 v) - m_1^* \chi + m_2^* + Q_y = 0\,. \end{aligned}\right| \tag{32}$$

[1] *E. Chwalla* findet die Funktionen B_y, B_z ebenfalls. Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaus, Heft 6, S. 12. Er bezeichnet die Größe B_y/J_y (B_z/J_z) (s. a. a. O. Fußnote 2) als die „Querschnittsstrecke".

Die Querkräfte Q_y, Q_z in den beiden letzten Gleichungen lassen sich noch mit Hilfe der zweiten und dritten Gleichung (31) eliminieren, so daß schließlich die folgenden vier Gleichungen übrigbleiben:

$$\left.\begin{aligned}
&N' - (\hat{Q}_y v')' - (\hat{Q}_z w')' - (\hat{M}_T \chi)'' - (m_T^* \chi)' = -p_T\,,\\
&M_T' - (\hat{M}_y v')' - (\hat{M}_z w')' - \hat{Q}_y w' - \hat{Q}_z v' + (\hat{L}_T \chi')' - (p_1 e_1 + p_2 e_2)\chi = -m_T^*\,,\\
&M_y'' + (\hat{M}_T v')'' - (\hat{L}_y \chi')'' + (\hat{N} w')' - (\hat{M}_z \chi)'' + (p_T e_1 \chi)' + (p_2(e_2 w' + e_2 v'))' = -m_1^{*\prime} - p_2\,,\\
&M_z'' + (\hat{M}_T w')'' - (\hat{L}_z \chi')'' - (\hat{N} v')' + (\hat{M}_y \chi)'' + (p_T e_2 \chi)' + (p_1(e_1 w' + e_1 v'))' = -m_2^{*\prime} + p_1\,.
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Dies sind die vier Gleichgewichtsbedingungen des räumlich verformten ursprünglich geraden Stabelements. Um die Grundgleichungen zu erhalten, müssen wir darin N', M_T', M_y'', M_z'' mit Hilfe des Elastizitätsgesetzes durch die Verschiebungen ausdrücken. [Dieselben Gleichungen (33) lassen sich auch direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{d\overline{\mathfrak{R}}}{dx} + \mathfrak{p} = 0\,, \qquad \frac{d\overline{\mathfrak{M}}}{dx} + \mathfrak{t} \times \overline{\mathfrak{R}} + \mathfrak{m}^* = 0$$

am verformten Stabelement $dx\,\mathfrak{t}$ herleiten. Für die Komponenten der Schnittgrößen $\overline{\mathfrak{R}}$, $\overline{\mathfrak{M}}$ sind dann die Beziehungen (25) einzusetzen.]

2. Die Elastizitätsgleichungen. a) Innere Kräfte; Verschiebungsdifferentialgleichungen. Zur Bestimmung der inneren Kräfte und Momente eines Stabes von beliebiger Querschnittsform reichen die Überlegungen der gewöhnlichen Biege- und Torsionstheorie aus zwei Gründen nicht mehr aus:

a) Biegung und Torsion sind bei unsymmetrischen Profilen gekoppelt (Schwerpunkt und „Schubmittelpunkt" fallen nicht zusammen);

b) bei der Torsion treten infolge von Verwölbungen (Verschiebungen in Richtung der Stabachse), die über die Stablänge veränderlich sind, Zusatzspannungen auf, die die Verteilung von Biege- und Torsionsenergie im Stabe und damit dessen Verformungszustand unter Umständen erheblich beeinflussen.

Über diesen Gegenstand gibt es einige grundlegende Arbeiten[1], trotzdem erscheint es angezeigt, hier eine kurze zusammenfassende Darstellung zu geben.

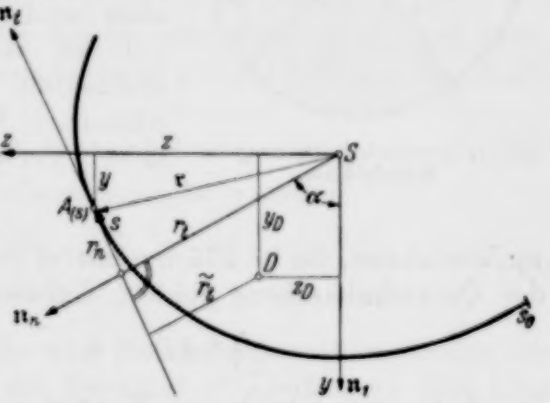

Abb. 3. Zur Definition der Querschnittskoordinaten.

Wir betrachten ein offenes dünnwandiges Profil von beliebiger Querschnittsform. „Dünnwandigkeit" soll besagen, daß jeder Querschnittspunkt durch Angabe der Linienkoordinate s der Profilmittellinie genügend genau festgelegt ist (Abb. 3), und daß es allein auf die Bestimmung von in der Profilmittellinie gelegenen Punkten ankommt. Dabei kann es zweckmäßig sein, sich auf ein profileigenes Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{n}_n$ in Richtung der Normalen und $\mathfrak{n}_t$ in Richtung der Tangente in einem Punkt s der Profilmittellinie zu beziehen. Zwischen diesen und den Einheitsvektoren $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ bestehen dann, wenn α den Winkel zwischen der Normalen und der Y-Achse ist, die Transformationsgleichungen

$$\mathfrak{n}_n = \mathfrak{n}_1 \cos\alpha + \mathfrak{n}_2 \sin\alpha\,, \qquad \mathfrak{n}_t = -\mathfrak{n}_1 \sin\alpha + \mathfrak{n}_2 \cos\alpha\,. \quad (34)$$

Der Fahrstrahl eines Punktes $A(y, z)$ bzw. $A(s)$ ist $\mathfrak{r} = y\,\mathfrak{n}_1 + z\,\mathfrak{n}_2 = r_t\,\mathfrak{n}_n + r_n\,\mathfrak{n}_t$, also

$$r_t = y\cos\alpha + z\sin\alpha\,, \quad r_n = -y\sin\alpha + z\cos\alpha \quad (35)$$

und bezogen auf einen beliebigen Drehpunkt $D(y_D\,,\ z_D)$

$$\tilde{r}_t = (y - y_D)\cos\alpha + (z - z_D)\sin\alpha = r_t - y_D\cos\alpha - z_D\sin\alpha\,. \quad (36)$$

Außerdem gilt für die Differentiale dy, dz der Profilmittellinie: $dy = -ds\sin\alpha$, $dz = ds\cos\alpha$.

Wir erinnern zunächst an die wichtigsten Formeln der Torsionstheorie dünnwandiger offener Profile.

Die (längs x konstanten) *St. Venant*schen Schubspannungen τ_t sind linear über die Profilmittellinie verteilt und verschwinden in der Profilmittellinie. Bezeichnen wir mit v_t die Ver-

[1] *R. Kappus*, a. a. O.; *K. Marguerre*, Ringbuch der Luftfahrttechnik II A; *W. Flügge* u. *K. Marguerre*, Ing.-Arch. 18 (1950), S. 23.

schiebung eines Punktes der Profilmittellinie in Richtung der Tangente an die Mittellinie und mit u_T die Verschiebung in Richtung der Stabachse (Verwölbung), dann bestimmt sich τ_T zu

$$\tau_T = G\gamma_T = G\left(\frac{\partial u_T}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial x}\right).$$

τ_T Mittellinie $= 0$ liefert daher eine einfache Beziehung zur Berechnung der Verwölbung der Profilmittellinie

$$u_T = -\int \frac{\partial v_t}{\partial x}\, ds\,, \tag{37}$$

oder nach Einsetzen von $v_t = r_t \chi$ (Erhaltung der Querschnittsgestalt, wie immer bei reiner Torsion)

$$u_T = -\chi' \int r_t\, ds\,, \qquad \frac{u_T}{\chi'} \equiv \varphi = -\int r_t\, ds\,. \tag{38}$$

Die Größe $\varphi = u_T/\chi'$ ist die auf die Einheit der Verwindung χ' bezogene Verwölbung, die in der Torsionstheorie als die „Wölbfunktion" bezeichnet wird. Sie hat die Dimension einer Fläche und ist eine rein geometrische, dem Querschnitt eigentümliche Größe: bis auf das Vorzeichen das Doppelte der vom Radiusvektor $\mathfrak{r}$ zwischen einem beliebigen Anfangspunkt s_0 und dem Punkt s überstrichenen Flächen (Abb. 4).

Abb. 4. Geometrische Deutung der Wölbfunktion.

In der Definition (38) für die Wölbfunktion steckt als „Bezugs"-punkt der Schwerpunkt; denn von dort aus wurde r_t gezählt. Da aber weder der Schwerpunkt noch ein anderer Querschnittspunkt bei der reinen Torsion ausgezeichnet ist, sind wir frei bei der Definition einer eigentlichen (mechanisch interessierenden) Verwölbung. Wir treffen die naheliegende Verabredung, als „eigentliche" Verwölbung des Profils die Größe

$$\varphi^* = -\int r_t^*\, ds \tag{39}$$

zu bezeichnen, die im Flächenmittel verschwindet und zu der im Mittel auch keine Schiefstellung der Querschnittsebene gehört, definieren φ^* also durch die drei Bedingungen

$$\int \varphi^*\, dF = 0\,, \qquad \int y\varphi^*\, dF = 0\,, \qquad \int z\varphi^*\, dF = 0\,. \tag{40}$$

Durch die erste Gleichung (40) wird die in (38) steckende Integrationskonstante festgelegt (Wahl eines geeigneten Anfangspunktes s_0 der Integration), durch die beiden anderen die Koordinaten des neuen Bezugspunktes für r_t, den wir $M(y_M, z_M)$ nennen wollen. Wir erhalten diese Koordinaten, wenn wir in (39) r_t^* nach (36) (mit M an Stelle von D als Bezugspunkt) unter Beachtung von $dy = -ds \sin\alpha$, $dz = ds\cos\alpha$ einführen

$$\varphi^* = -\int\left(r_t - y_M \frac{dz}{ds} + z_M \frac{dy}{ds}\right) ds = \varphi + y_M z - z_M y\,. \tag{41}$$

Mit den Abkürzungen

$$R_y = \int z\varphi\, dF\,, \qquad R_z = -\int y\varphi\, dF \tag{42}$$

liefert dann (40)

$$y_M = -\frac{R_y J_z + R_z J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2}\,, \qquad z_M = -\frac{R_z J_y + R_y J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2}\,. \tag{43}$$

Nach dieser kurzen Wiederholung der Torsionsverwölbungstheorie können wir dazu übergehen, den Wölbeinfluß im verformten Stab zusammen mit dem Biegeeinfluß zu untersuchen.

Die Querverschiebung $\mathfrak{v}_A$ eines beliebigen Querschnittspunktes A ist nach (15) $\mathfrak{v}_A = \mathfrak{v} + \mathfrak{d}_T \times \mathfrak{r} = \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_T$, entsteht also durch die Verschiebung $\mathfrak{v}$ des Schwerpunkts und die Drehung $\mathfrak{d}_T$ der Profilfläche um den Schwerpunkt. Die Querverschiebung $\mathfrak{v}_A$ ist von Längsverschiebungen (Verwölbungen) $u_A = u_1 + u_2$ in Richtung der Stabachse begleitet, u_1 herrührend von der Verschiebung $\mathfrak{v}$, u_2 herrührend von der Verschiebung $\mathfrak{v}_T$ infolge $\mathfrak{d}_T$. Dabei ist u im Gegensatz zur reinen Torsion mit x veränderlich, so daß im Inneren des Stabes Längsspannungen

$$\sigma = E\frac{\partial u_A}{\partial x} \tag{44}$$

entstehen, denen aus Gleichgewichtsgründen (Abb. 5) Schubspannungen

$$\vec{\tau} = -E\int \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_A}{\partial x^2}\, ds \tag{45}$$

zugeordnet sind. [Volumkräfte lassen wir an dieser Stelle beiseite; ihr Einfluß wird weiter hinten über eine Energiebetrachtung bestimmt.] Bezüglich der τ, die wir uns ebenso wie die σ über die Profildicke als gleichförmig verteilt vorstellen, können wir die aus der gewöhnlichen Balkentheorie wohlbekannte Annahme machen, daß die von ihnen herrührenden Formänderungen wegen $\tau \ll \sigma$ vernachlässigbar sind. (Diese Annahme ist nur bei offenen Profilen zulässig, weshalb sich die hier anschließenden Überlegungen nicht auf Rohrprofile übertragen lassen.) Im Hinblick auf die Verschiebung $\mathfrak{v}$ führt dies zu der *Bernoulli*schen Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte

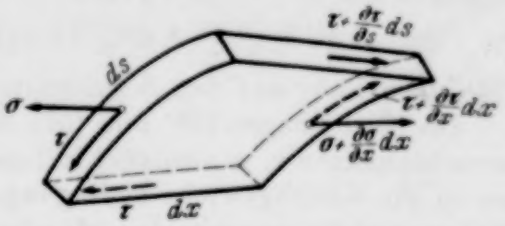

Abb. 5. Gleichgewicht am Flächenelement.

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{d}_v \times \mathfrak{r} = -(w'z + v'y)\mathfrak{t}\,, \tag{46}$$

hinsichtlich der Drehung $\mathfrak{d}_T$ zu der Annahme, daß die Schubverzerrungen $\gamma_2 = \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial x}$ wie bei reiner Torsion in der Profilmittellinie verschwinden, so daß wir u_2 aus $\gamma_2 = 0$ bestimmen dürfen. Hieraus ergibt sich, wie in (37) die Verwölbung u_2 und entsprechend die Wölbfunktion

$$\varphi = \frac{u_2}{\chi'} = -\int r_t\, ds\,, \tag{47}$$

dieselbe, die wir durch (38) schon eingeführt haben. Die Gesamtverschiebung $\mathfrak{u}_A$ wird dann, wenn wir noch die über den Querschnitt konstante Verschiebung $\mathfrak{u} = u\mathfrak{t}$ infolge Längskraft hinzunehmen,

$$\mathfrak{u}_A = \mathfrak{u} + \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 = (u - w'z - v'y + \chi'\varphi)\mathfrak{t}\,. \tag{48}$$

Damit sind dann nach (44) und (45) die Längs- und Schubspannungen $\vec{\sigma}$ und $\vec{\tau}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\sigma} &= E(u' - w''z - v''y + \chi''\varphi)\mathfrak{t}\,, \\ \vec{\tau} &= E\int (w'''z + v'''y - \chi'''\varphi)\, ds\, \mathfrak{n}_t\,. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Bevor wir durch Integration daraus die inneren Kräfte und Momente gewinnen, formen wir (49) noch um, indem wir an Stelle der Wölbfunktion φ die Funktion φ^* einführen: Den Gleichungen (49) liegt die Vorstellung zugrunde, daß die Gesamtbewegung eines Querschnittspunktes A sich aufspalten läßt in eine allen Punkten gemeinsame Verschiebung und in eine Drehung um den Schwerpunkt. Wählen wir als Drehpunkt den Schubmittelpunkt M, und führen dessen Verschiebungen

$$v_M = v - z_M\chi\,, \qquad w_M = w + y_M\chi \tag{50}$$

unter Beachtung von (41) in (49) ein, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \vec{\sigma} &= E(u' - w_M''z - v_M''y + \chi''\varphi^*)\mathfrak{t}\,, \\ \vec{\tau} &= E\int (w_M'''z + v_M'''y - \chi'''\varphi^*)\, ds\, \mathfrak{n}_t\,, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

und diese Formeln haben vor (49) den Vorzug, daß bei der Bildung von $\int y\,\sigma\, dF$ usw. wegen (40) die Wölbterme wegfallen. Die Größen $\sigma^* = E\chi''\varphi^*$, $\tau^* = -E\chi'''\int \varphi^*\, ds$ sind die sogenannten Wölbspannungen. Die σ^* haben keine Resultante, die τ^* liefern ein Torsionsmoment.

Aus (51) wollen wir nun das Elastizitätsgesetz für die inneren Kräfte durch Integration bestimmen. Wir bilden mit $\mathfrak{s}_i = \sigma\mathfrak{t} + \tau\,\mathfrak{n}_t$ die innere elastische Kraft

$$\mathfrak{N}_i = \int\limits_{(F)} \mathfrak{s}_i\, dF \tag{52}$$

und, unter Berücksichtigung des *St. Venant*schen Torsionsanteils $\mathfrak{M}_v = G I_T \chi'\mathfrak{t}$ das innere Moment, bezogen auf den Schwerpunkt,

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_v + \int\limits_{(F)} \mathfrak{r} \times \mathfrak{s}_i\, dF = \int \mathfrak{r} \times \vec{\sigma}\; dF + (\mathfrak{M}_v + \int r_t\,\tau\, dF\,\mathfrak{t}) = \mathfrak{M}_b + \mathfrak{M}_T\,. \tag{53}$$

Aus (52) folgt mit (51) eine innere Längskraft

$$\mathfrak{S} = N\mathfrak{t} = EF\,u'\,\mathfrak{t} \tag{54}$$

und unter Beachtung von (34) und (40) nach partieller Integration eine innere Querkraft

$$\mathfrak{Q}_i = -(EJ_z\, v'''_M + EJ_{yz}\, w'''_M)\,\mathfrak{n}_1 - (EJ_y\, w'''_M + EJ_{yz}\, v'''_M)\,\mathfrak{n}_2\,, \tag{55}$$

aus (53) ein inneres Biegemoment

$$\mathfrak{M}_b = -(EJ_y\, w''_M + EJ_{yz}\, v''_M)\,\mathfrak{n}_1 + (EJ_z\, v''_M + EJ_{yz}\, w''_M)\,\mathfrak{n}_2\,, \tag{56}$$

sowie mit der Bezeichnung $C^* = \int \varphi^{*2}\, dF$ („Wölbwiderstand") ein inneres Torsionsmoment, bezogen auf den Schwerpunkt

$$\mathfrak{M}_T = [G I_T\, \chi' - E C^* \chi''' - (EJ_y\, y_M - EJ_{yz}\, z_M)\, w'''_M + (EJ_z\, z_M - EJ_{yz}\, y_M)\, v'''_M]\,\mathfrak{t}\,. \tag{57}$$

(Bei Beziehung auf den Schubmittelpunkt enthält der Ausdruck nur die beiden ersten Terme.)

Die Gleichungen (56) und (57), die sich mit Hilfe von (50) auch leicht in den Schwerpunktsverschiebungen v, w ausdrücken lassen, sind die gesuchten Elastizitätsgleichungen. Führt man sie in die Gleichgewichtsbedingungen (33) ein, so erhält man die vollständigen Verschiebungsdifferentialgleichungen des räumlich verformten ursprünglich geraden Stabes von beliebiger offener Querschnittsform. Diese Gleichungen, die wir aus Raumgründen hier nicht anschreiben, enthalten insbesondere die vollständigen Knickbiegegleichungen und die Differentialgleichungen des allgemeinen Kipproblems. Sie lassen sich leicht auf den Fall einer elastischen Bettung des Trägers, die an der Stelle $B(b_1, b_2)$ des Querschnitts angreifen mag, erweitern, wenn $e_1 = b_1$, $e_2 = b_2$ und $p_1 = -k_1\, v_B$, $p_2 = -k_2\, w_B$, sowie $m_T = -k_T \chi$ gesetzt wird.

b) Randbedingungen. Die Randbedingungen sind, genau wie die Differentialgleichungen gekoppelt, und es sind, wie immer, geometrische und mechanische Randgrößen einander zugeordnet; abgesehen vom Fall einer elastischen Randeinspannung, den wir hier nicht im Auge haben, muß je eine an den Rändern verschwinden. (Verschiebung — Querkraft, Drehung — Moment usw.).

Die Zuordnung finden wir aus einer Energieaussage. Wir bilden die Arbeit δA aller Kräfte $\mathfrak{F}_i\, dF$ bei einer Verschiebung $\delta \mathfrak{w}_A = \delta \mathfrak{u}_A + \delta \mathfrak{v}_A$. Schreiben wir an Stelle von (15) $\mathfrak{v}_A = \mathfrak{v}_M + \mathfrak{d}_T \times (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) = \mathfrak{v}_M + \mathfrak{d}_T \times \mathfrak{r}^*$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\delta A = \int (\tau\, \mathfrak{n}_t\, \delta \mathfrak{v}_A + \sigma\, \mathfrak{t}\, \delta \mathfrak{u}_A)\, dF = &-\delta v_M \int \tau \sin\alpha\, dF + \delta w_M \int \tau \cos\alpha\, dF + \delta\chi \int \tau\, r_t^*\, dF \\ &+ \delta u \int \sigma_0\, dF - \delta v'_M \int y \sigma\, dF - \delta w'_M \int z \sigma\, dF + \delta\chi' \int \sigma \varphi^*\, dF.\end{aligned}$$

Die ersten sechs Integrale der rechten Seite haben eine leicht erkennbare mechanische Bedeutung:

$$\begin{aligned}&\int \tau \sin\alpha\, dF = -Q_y\,, \quad \int \tau \cos\alpha\, dF = Q_z\,, \quad \int \tau\, r_t^*\, dF = M_T^*\,, \\ &\int \sigma_0\, dF = N\,, \quad \int z \sigma\, dF = M_y\,, \quad \int y \sigma\, dF = -M_z\,.\end{aligned}$$

Das letzte Integral, das an der Verwindung $\delta\chi'$ Arbeit leistet, bezeichnen wir mit

$$W^* = \int \sigma \varphi^*\, dF = E\chi'' \int \varphi^{*2}\, dF = E C^*\, \chi''\,. \tag{58}$$

(W^* ist in gleicher Weise wie die Biegemomente gebildet, nur tritt hier an die Stelle der Hebelarme y, z die Verwölbung φ^*.) Setzen wir $E\chi'' \varphi^{*2} = \frac{\sigma^{*2}}{E\chi''}$ in (58) ein:

$$W^* = \frac{1}{E\chi''} \int \sigma^{*2}\, dF\,,$$

so erkennt man, daß W^* in den Stabenden nur verschwinden kann, wenn die Wölbspannungen σ^* überall Null sind. Dies ist der Fall bei freier Verwölbbarkeit der Endquerschnitte.

Damit lesen wir aus der δA-Gleichung die folgende Zuordnung von geometrischen und mechanischen Größen ab:

$$\left.\begin{array}{lll} \delta u \leftrightarrow N\,, & \delta v_M \leftrightarrow Q_y\,, & \delta w_M \leftrightarrow Q_z\,, \\ \delta \chi \leftrightarrow M_T^*\,, & \delta v'_M \leftrightarrow M_z\,, & \delta w'_M \leftrightarrow -M_y\,. \\ & \delta \chi' \leftrightarrow W^*\,, & \end{array}\right\} \tag{59}$$

im besonderen bedeutet hierbei

$$\left.\begin{array}{l} \delta\chi' = 0 \;\; (\delta u = 0) \;\rightarrow \text{völlige Wölbbehinderung}, \\ W^* = 0 \;\; (\sigma^* = 0) \;\rightarrow \text{freie Verwölbbarkeit}\,. \end{array}\right\} \tag{60}$$

Die Beziehung auf die Verschiebungen v_M, w_M des Schubmittelpunktes ist, wie man z. B. aus den Elastizitätsgleichungen (56) ersieht, mitunter sehr vorteilhaft, da sich so die Differentialgleichungen in bestimmten Fällen entkoppeln lassen. Indessen wird man in vielen Fällen wegen

der Randbedingungen und der Form der von den äußeren Kräften herrührenden Teile der Differentialgleichungen auf die Schwerpunktsverschiebungen v, w beziehen müssen. Dann ändern sich die Zuordnungen (53) in folgender Weise ab:

$$\begin{array}{lll} \delta u \leftrightarrow N\,, & \delta v \leftrightarrow Q_y\,, & \delta w \leftrightarrow Q_z\,, \\ \delta \chi \leftrightarrow M_T\,, & \delta v' \leftrightarrow M_z\,, & \delta w' \leftrightarrow M_y \\ & \delta \chi' \leftrightarrow W\,, & \end{array} \tag{59}$$

mit

$$\begin{aligned} M_T &= G I_T \chi' - E C \chi''' - (E J_y y_M - E J_{yz} z_M) w''' + (E J_z z_M - E J_{yz} y_M) v''', \\ M_y &= E J_y w'' - E J_{yz} v'' - (E J_y y_M - E J_{yz} z_M) \chi'', \\ M_z &= E J_z v'' + E J_{yz} w'' - (E J_z z_M - E J_{yz} y_M) \chi'', \\ W &= E C \chi'' + (E J_y y_M - E J_{yz} z_M) w'' - (E J_z z_M - E J_{yz} y_M) v'', \end{aligned} \tag{61}$$

wobei

$$C = C^* + y_M^2 J_y + z_M^2 J_z - 2\, y_M z_M J_{yz} \tag{62}$$

ist. Die Komponenten M_y, M_z des Biegemoments sind dieselben wie in (57), M_T und W stimmen dagegen infolge Änderung des Bezugspunktes nicht mehr mit M_T^* und W^* überein, und zwar besteht nach (62) und den beiden ersten Gleichungen (61) zwischen M_T, M_T^* und W, W^* der Zusammenhang

$$\begin{aligned} M_T &= M_T^* - y_M Q_z + z_M Q_y\,, \\ W &= W^* - y_M M_y - z_M M_z\,. \end{aligned} \tag{63}$$

3. Energieausdrücke; Bewegungsgleichungen. Zur Gewinnung von Näherungslösungen mit Hilfe des *Hamilton*schen Prinzips, welches das Minimum des Zeitintegrals über die *Lagrange*sche Funktion $\Phi = \Pi - T$ in einem Zeitintervall $t_1 - t_0$, also

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi \, dt = 0 \tag{64}$$

fordert, benötigen wir noch Ausdrücke für die potentielle Energie $\delta\, \Pi$ und die kinetische Energie $\delta\, T$.

Den Ausdruck für die potentielle Energie gewinnen wir bequem aus den für (statisches) Gleichgewicht gültigen Beziehungen

$$\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}_a\,, \qquad \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_a\,.$$

$\mathfrak{S}_a$ stimmt mit $N\mathfrak{t}$ (25a), und die Komponenten von $\mathfrak{M}_a$ stimmen mit M_T, M_y, M_z (25b) überein. Wegen $\delta \Pi_i = \int (\mathfrak{S}_i\, \vec{\delta\varepsilon} + \mathfrak{M}_i\, \vec{\delta\varkappa})\, dx$ mit $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}$ folgt dann sofort

$$\delta \Pi = \delta (\Pi_i + \Pi_a) = \int (\mathfrak{S}_i - \mathfrak{S}_a)\, \delta \vec{\varepsilon}\, dx + \int (\mathfrak{M}_i - \mathfrak{M}_a)\, \delta \vec{\varkappa}\, dx = 0\,, \tag{65}$$

ein Ausdruck, der ohne Mühe mit Hilfe von (21), (25) und (54) bis (57) ausgewertet werden kann.

Die Variation $\delta\, T$ der kinetischen Energie gewinnen wir, wenn wir Ableitungen nach der Zeit mit Punkten bezeichnen, aus

$$\delta T = \int_{(M)} \dot{\mathfrak{w}}_m\, \delta \dot{\mathfrak{w}}_m \, dm\,, \tag{66}$$

Die Integration erstreckt sich hierbei über die gesamte mitschwingende Masse (M), neben der Stabmasse $\int dm_0 = \varrho \iint dF\, dx$ (ϱ ist die Dichte des Stabmaterials) also auch über die im Abstand $\mathfrak{e}$ angreifende Masse $\int (|\mathfrak{x}|/g)\, dx$ der äußeren Belastung. Dabei ist $\dot{\mathfrak{w}}_m$ die Geschwindigkeit jedes Massenteilchens. Es ist also, ausführlich geschrieben,

$$\delta T = \int \left(\int \varrho\, \dot{\mathfrak{w}}_A\, \delta \dot{\mathfrak{w}}_A \, dF + \frac{|\mathfrak{p}|}{g}\, \dot{\mathfrak{w}}_E\, \delta \dot{\mathfrak{w}}_E \right) dx \tag{66'}$$

mit

$$|\mathfrak{p}| = \sqrt{P_T^2 + P_1^2 + P_2^2} = p\,.$$

Die Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{w}}_A$ eines Flächenteilchens dF im Punkt A ist nach (15) und (48)

$$\dot{\mathfrak{w}}_A = \dot{\mathfrak{u}}_A + \dot{\mathfrak{v}}_A = (\dot{u} - \dot{v}' y - \dot{w}' z + \dot{\chi}' \varphi)\, \mathfrak{t} + (\dot{v} - z\, \dot{\chi})\, \mathfrak{n}_1 + (\dot{w} + y\, \dot{\chi})\, \mathfrak{n}_2\,,$$

sowie die Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{w}}_E$ des Angriffspunktes E der äußeren Last, wenn wir Wölbeinflüsse auf $\mathfrak{w}_E$ nicht berücksichtigen,

$$\dot{\mathfrak{w}}_E = \dot{\mathfrak{w}} + \dot{\mathfrak{v}} \times \mathfrak{e} = (u - \dot{v}'\, e_1 - \dot{w}'\, e_2)\, \mathfrak{t} + (\dot{v} - e_1\, \dot{\chi})\, \mathfrak{n}_1 + (\dot{w} + e_1 \dot{\chi})\, \mathfrak{n}_2\,.$$

Damit geht (66′) über in

$$\left.\begin{aligned}\delta T = \int\Big\{&\Big[\Big(\varrho F+\frac{p}{g}\Big)\dot u-\frac{p}{g}\,(\dot v' e_1+\dot w' e_2)\Big]\,\delta\dot u\\ &+\Big[\varrho J_p\dot\chi+\frac{p}{g}\,(e_1^2+e_2^2)\dot\chi-\frac{p e_2}{g}\,\dot v+\frac{p e_1}{g}\,\dot w\Big]\,\delta\dot\chi+\Big[\Big(\varrho F+\frac{p}{g}\Big)\dot v-\frac{p e_2}{g}\,\dot\chi\Big]\,\delta\dot v\\ &+\Big[\Big(\varrho F+\frac{p}{g}\Big)\dot w+\frac{p e_1}{g}\,\dot\chi\Big]\,\delta\dot w+[\varrho C\dot\chi'+\varrho(J_y y_M-J_{yz}z_M)\,\dot w'+\varrho\,(J_{yz}y_M-J_z z_M)\,\dot v']\delta\dot\chi'\\ &+\Big[-\frac{p e_1}{g}\,\dot u+\varrho J_z\dot v'+\varrho J_{yz}\,\dot w'+\varrho(J_{yz}\,y_M-J_z\,z_M)\,\dot\chi'+\frac{p e_1^2}{g}\,\dot v'+\frac{p e_1 e_2}{g}\,\dot w'\Big]\,\delta\dot v'\\ &+\Big[-\frac{p e_2}{g}\,\dot u+\varrho J_{yz}\dot v'+\varrho J_y\dot w'+\varrho\,(J_y y_M-J_{yz}z_M)\,\dot\chi'+\frac{p e_1 e_2}{g}\,\dot v'+\frac{p e_2^2}{g}\,\dot w'\Big]\,\delta\dot w'\Big\}\,dx\,.\end{aligned}\right\}\quad(67)$$

Aus (64) kann man nun noch die Bewegungsgleichungen erhalten; sie sind identisch mit den in Anschluß an Gleichung (57) besprochenen Verschiebungsdifferentialgleichungen, wenn dort in den von e_1, e_2 freien $\mathfrak{p}$-Gliedern

$$\left.\begin{aligned}&p_T=-\Big(\varrho F+\frac{p}{g}\Big)\ddot u+\frac{p}{g}\,(e_1\ddot v'+e_2\ddot w')\,,\quad p_1=-\Big(\varrho F+\frac{p}{g}\Big)\ddot v\,,\quad p_2=-\Big(\varrho F+\frac{p}{g}\Big)\ddot w\\ &\text{und}\\ &m_T^*=-\Big(\varrho F i_p^2+\frac{p}{g}\,(e_1^2+e_2^2)\Big)\ddot\chi+\varrho C\ddot\chi''+\varrho(J_y y_M-J_{yz}z_M)\,\ddot w''\\ &\qquad\qquad+\varrho\,(J_{yz}y_M-J_z z_M)\,\ddot v''-\frac{p e_1}{g}\,\ddot w+\frac{p e_2}{g}\,\ddot v\\ &m_1^*=-\frac{p e_2}{g}\,\ddot u+\varrho J_y\,\ddot w'+\varrho J_{yz}\,\ddot v'+\varrho\,(J_y y_M-J_{yz}z_M)\,\ddot\chi'+\frac{p e_1 e_2}{g}\,\ddot v'+\frac{p e_2^2}{g}\,\ddot w'\\ &-m_2^*=-\frac{p e_1}{g}\,\ddot u+\varrho J_{yz}\,\ddot w'+\varrho J_z\,\ddot v'+\varrho(J_{yz}y_M-J_z z_M)\,\ddot\chi'+\frac{p e_1^2}{g}\,\ddot v'+\frac{p e_1 e_2}{g}\,\ddot w'\end{aligned}\right\}\quad(68)$$

gesetzt wird.

Die so erhaltenen partiellen Differentialgleichungen sind die allgemeinen Schwingungsgleichungen, von denen die Ermittlung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen auszugehen hat. Die Glieder mit den gemischten Ableitungen berücksichtigen den Einfluß der Rotations- und Wölbträgheit des Stabelements, der i. a. nicht sehr groß ist. Er wird in II, Ziff. 1c am Beispiel des Stabes von unsymmetrischer Querschnittsform bestimmt, sonst aber vernachlässigt. (Ihn mitzunehmen hat übrigens nicht viel Sinn, wenn man nicht auch die Schubelastizität des Trägers berücksichtigt).

II. Spezielle Probleme.

1. Geometrisch gekoppelte Schwingungen. Unter „geometrischer Kopplung" verstehen wir den Koppeleinfluß, der durch eine Abweichung von der doppelten Querschnittssymmetrie entsteht. Der Begriff der Biege- und Torsionsfrequenzen, der bei den doppelt-symmetrischen Profilen eindeutig ist, verliert hierbei zunächst seinen Sinn, denn es ergeben sich infolge der Kopplung Frequenzen, die sowohl der Biege- als auch der Torsionsschwingung „eigen" sind. Wir wollen aber übereinkommen, die Eigenfrequenzen, die für verschwindende Kopplung ($y_M = z_M \to 0$) in die Torsions- und Biegefrequenzen des zugehörigen doppelt-symmetrischen Stabes übergehen, auch dann noch als „Biege"- und „Torsions"frequenzen zu bezeichnen.

Der allgemeinste hierher gehörige Fall ist der Stab von unsymmetrischer Querschnittsform mit $y_M \neq 0$, $z_M \neq 0$. Für verschwindende äußere Lasten ($\hat{\mathfrak{R}} = 0$, $\hat{\mathfrak{M}} = 0$, $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{m} = 0$) lauten die zugehörigen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}&E C\chi^{IV}+(EJ_y y_M-EJ_{yz}z_M)\,w^{IV}+(EJ_{yz}y_M-EJ_z z_M)\,v^{IV}-G I_T\chi''+\varrho J_p\ddot\chi\\ &\qquad-\varrho C\ddot\chi''-\varrho(J_y y_M-J_{yz}z_M)\,\ddot w''-\varrho(J_{yz}y_M-J_z z_M)\,\ddot v''=0\,,\\ &E J_y w^{IV}+E_{yz}v^{IV}+(EJ_y y_M-EJ_{yz}z_M)\,\chi^{IV}+\varrho F\ddot w-\varrho J_y\ddot w''-\varrho J_{yz}\ddot v''-\\ &\qquad-\varrho(J_y y_M-J_{yz}z_M)\,\ddot\chi''=0\,,\\ &EJ_z v^{IV}+EJ_{yz}w^{IV}+(EJ_{yz}y_M-EJ_z z_M)\,\chi^{IV}+\varrho F\ddot v-\varrho J_{yz}\ddot w''-\varrho J_z\ddot v''-\\ &\qquad-\varrho(J_{yz}y_M-J_z z_M)\,\ddot\chi''=0\,.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Dieses System läßt, wie man sich leicht überzeugt, periodische Lösungen zu. Wir führen deshalb die Ansätze

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \bar{\chi}(x)\sin\omega t\,,\\ w/l &= \bar{w}(x)\sin\omega t\,,\\ v/l &= \bar{v}(x)\sin\omega t \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ein, die die partiellen Differentialgleichungen (1) unter Benützung einer neuen dimensionslosen Veränderlichen $\xi = x/l$ in das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen überführen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{C}{C^*}\chi^{IV} + \nu^2\eta_y^2\left(\frac{y_M}{l} - \lambda\frac{z_M}{l}\right)w^{IV} + \nu^2\eta_y^2\left(\lambda\frac{y_M}{l} - \varepsilon\frac{z_M}{l}\right)v^{IV} - \nu^2\chi'' - \omega^2\psi_T\\ &\left[\chi - \frac{i_y^2}{i_p^2}\left(\frac{i_w^2}{l^2} + \frac{y_M^2}{l^2} + \varepsilon\frac{z_M^2}{l^2} - 2\lambda\frac{y_M z_M}{l^2}\right)\chi'' - \frac{i_y^2}{i_p^2}\left(\frac{y_M}{l} - \lambda\frac{z_M}{l}\right)w'' - \frac{i_y^2}{i_p^2}\left(\lambda\frac{y_M}{l} - \varepsilon\frac{z_M}{l}\right)v''\right] = 0\,,\\ &w^{IV} + \lambda v^{IV} + \left(\frac{y_M}{l} - \lambda\frac{z_M}{l}\right)\chi^{IV} - \omega^2\psi_y\left[w - \frac{i_y^2}{l^2}w'' - \lambda\frac{i_y^2}{l^2}v'' - \frac{i_y^2}{l^2}\left(\frac{y_M}{l} - \lambda\frac{z_M}{l}\right)\chi''\right] = 0\,,\\ &\varepsilon v^{IV} + \lambda w^{IV} + \left(\lambda\frac{y_M}{l} - \varepsilon\frac{z_M}{l}\right)\chi^{IV} - \omega^2\psi_y\left[v - \varepsilon\frac{i_y^2}{l^2}v'' - \lambda\frac{i_y^2}{l^2}w'' - \frac{i_y^2}{l^2}\left(\lambda\frac{y_M}{l} - \varepsilon\frac{z_M}{l}\right)\chi''\right] = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Hierbei bedeuten nun w und v die auf die Längeneinheit bezogenen (dimensionslosen) nur von ξ abhängigen Querverschiebungen der Schwerachse: $v \equiv \bar{v}(\xi)$, $w \equiv \bar{w}(\xi)$, und Striche bezeichnen Ableitungen nach ξ. Ferner haben wir zur Abkürzung gesetzt

$$\left.\begin{aligned} \nu^2 &= \frac{G I_T l^2}{E C^*}\,, & \eta_y^2 &= \frac{E J_y}{G I_T}\,, & \lambda &= \frac{J_{yz}}{J_y}\,, & \psi_T &= \frac{\varrho J_p l^4}{E C^*}\,,\\ \varepsilon &= \frac{J_z}{J_y}\,, & i_y^2 &= \frac{J_y}{F}\,, & i_w^2 &= \frac{C^*}{J_y}\,, & \psi_y &= \frac{\varrho F l^4}{E J_y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Der freiaufliegende Träger sei den Randbedingungen $\xi = 0{,}1$:

$$\left.\begin{aligned} \chi &= 0\,, & v &= 0\,, & w &= 0\,,\\ W &= 0\,, & M_z &= 0\,, & M_y &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

unterworfen, d. h. er sei gegen Verschieben senkrecht zur x-Achse und gegen Drehung um die x-Achse gehalten und außerdem frei verwölbbar und senkrecht zur x-Achse frei drehbar. Diesen Randbedingungen genügen die Lösungsansätze

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \sum A_n \sin n\pi\xi\,,\\ v &= \sum B_n \sin n\pi\xi\,,\\ w &= \sum C_n \sin n\pi\xi\,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

die, da sie auch die Differentialgleichungen (3) befriedigen, die strengen Lösungen des Problems sind.

a) Träger mit doppelt-symmetrischer Profilform. Bei den doppelt-symmetrischen Profilen fällt Schwerpunkt und Schubmittelpunkt zusammen, es ist also $y_M = z_M = 0$, $C = C^*$ und wenn wir auf Hauptachsen beziehen, $\lambda = 0$. Die Gleichungen (3) entkoppeln sich und wir erhalten die drei unabhängigen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\chi^{IV} - \nu^2\chi'' - \psi_T\omega^2\chi = 0\,,\\ &w^{IV} - \psi_y\omega^2 w = 0\,,\\ &\varepsilon v^{IV} - \psi_y\omega^2 v = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Aus diesen berechnen sich nach Einführen der Lösungen (6) die Eigenfrequenzen zu

$$\omega_{T_n}^2 = \frac{1}{\psi_T}(n^4\pi^4 + \nu^2 n^2\pi^2)\,, \qquad \omega_{y_n}^2 = \frac{1}{\psi_y}n^4\pi^4, \qquad \omega_{z_n}^2 = \frac{\varepsilon}{\psi_y}n^4\pi^4 = \varepsilon\omega_{y_n}^2\,. \tag{8}$$

Hier sind ω_{y_n}, ω_{z_n} die bekannten Biegefrequenzen des doppelt-symmetrischen Stabes, ω_{T_n} ist seine Torsionsfrequenz.

b) Träger mit einfach-symmetrischer Profilform. α) *Eigenfrequenzen.* Wir setzen Symmetrie zur y-Achse voraus. Es ist dann $y_M \neq 0$, $z_M = 0$, $\lambda = 0$, $C^* = C - y_M^2 J_y$, und die

Gleichungen (3) gehen über in das simultane System

$$\left.\begin{aligned} &\frac{C}{C^*}\,\chi^{IV} + \eta_y^2 \nu^2 \frac{y_M}{l}\, w^{IV} - \nu^2 \chi'' - \psi_T \omega^2 \chi = 0 \\ &w^{IV} + \frac{y_M}{l}\,\chi^{IV} - \psi_y \omega^2 w = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die verbleibende dritte Gleichung stimmt mit der dritten Gleichung (7) überein und führt auf die Biegefrequenz ω_{z_n}. Aus den beiden Gleichungen (9) erhalten wir nach Einführen der Ansätze (6) das homogene Gleichungssystem

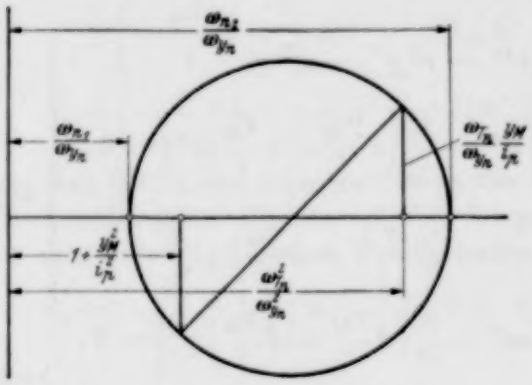

Abb. 6. Frequenzkreis.

$$A_n\left[\frac{C}{C^*}\, n^4\pi^4 + \nu^2 n^2 \pi^2 - \psi_T \omega^2\right] + C_n \eta_y^2 \nu^2 \frac{y_M}{l}\, n^4 \pi^4 = 0\,,$$

$$A_n \frac{y_M}{l}\, n^4 \pi^4 + C_n\,[n^4\pi^4 - \psi_y \omega^2] = 0\,,$$

das nur dann eine von der trivialen Lösung $A_n = C_n = 0$ verschiedene Lösung hat, wenn seine Koeffizientendeterminante Δ verschwindet. Aus $\Delta = 0$ gewinnen wir so mit den Bezeichnungen (8) unter Benützung von

$$\frac{C}{C^*} = 1 + \frac{y_M^2}{l^2}\,\nu^2 \eta_y^2\,, \qquad \nu^2 \eta_y^2 \frac{\psi_y}{\psi_T} = \frac{1}{i_p^2/l^2}$$

die gesuchte Frequenzgleichung in der Form

$$\frac{\omega_n^4}{\omega_{y_n}^4} - \frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2}\left[1 + \frac{y_M^2}{i_P^2} + \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\right] + \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2} = 0 \tag{10}$$

und daraus sofort

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{y_M^2}{i_P^2}\right) + \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\right] \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(1 + \frac{y_M^2}{i_P^2}\right) - \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\right]^2 + \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\frac{y_M^2}{i_P^2}}\,. \tag{10'}$$

Diese Beziehung erlaubt eine einfache graphische Bestimmung der beiden Wurzeln $\omega_n^{(1)}$ und $\omega_n^{(2)}$. Wir nennen diese Darstellung in Analogie zum *Mohr*schen Spannungskreis „Frequenzkreis" (Abb. 6).

β) *Einfluß einer Längskraft.* Werden in (9) die von der Wirkung einer Längskraft $\hat{N} = \sigma_0 F$ herrührenden Glieder hinzugefügt, dann gelten mit der Abkürzung $\alpha^2 = \hat{N} l^2 / E J_y$ die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{C}{C^*}\,\chi^{IV} + \frac{y_M}{l}\,\nu^2 \eta_y^2 w^{IV} - \left(\nu^2 + \alpha^2 \eta_y^2 \nu^2 \frac{i_p^2}{l^2}\right)\chi'' - \omega^2 \psi_T \chi = 0\,, \\ &w^{IV} + \frac{y_M}{l}\,\chi^{IV} - \alpha^2 w'' - \omega^2 \psi_y w = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die Ansätze (6) für χ und w erfüllen auch hier Differentialgleichungen und Randbedingungen. Führen wir sie in (11) ein, dann erhalten wir ein in den unbekannten Amplituden A_n, C_n homogenes Gleichungssystem. Aus dem Verschwinden seiner Koeffizientendeterminante folgt, wenn wir mit $N_{En} = (n^2\pi^2/l^2)\, E J_y$ die n-te Knicklast des *Euler*stabes und mit β_n^2 das Verhältnis $\frac{\hat{N}}{N_{En}} = \frac{\alpha^2}{n^2\pi^2} = \beta_n^2$ bezeichnen, die Frequenzgleichung

$$\frac{\omega_n^4}{\omega_{y_n}^4} - \frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2}\left[\left(1 + \frac{y_M^2}{i_P^2}\right) + \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2} + 2\beta_n^2\right] + \left[\beta_n^4 + \beta_n^2\left(1 + \frac{y_M^2}{i_P^2} + \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\right) + \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\right] = 0 \tag{12}$$

und daraus für die Frequenzquadrate

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{y_M^2}{i_P^2}\right) + \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2} + 2\beta_n^2\right] \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(1 + \frac{y_M^2}{i_P^2}\right) - \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\right]^2 + \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\frac{y_M^2}{i_P^2}} \tag{12'}$$

oder, wenn wir mit ω_n die aus (10') bekannten Eigenfrequenzen ($\alpha^2 = 0$) bezeichnen, kurz

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2} = \frac{\tilde{\omega}_n^2}{\omega_{y_n}^2} + \beta_n^2. \tag{13}$$

Für die Frequenzquadrate besteht danach eine lineare Abhängigkeit von $\hat{N}$, insbesondere wachsen sie mit zunehmender Zugkraft unbeschränkt an und gehen asymptotisch in $\omega_n^2/\omega_{y_n}^2 = \beta_n^2$ über.

Ein ganz anderes Verhalten zeigt sich bei Druckbelastung. Mit $\beta_n = i\beta_{Dn}$ folgt aus (13)

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2} = \frac{\tilde{\omega}_n^2}{\omega_{y_n}^2} - \beta_{Dn}^2 . \tag{13'}$$

Die Frequenzen nehmen mit wachsender Belastung ab und erreichen für zwei ausgezeichnete Werte $\beta_{Dn_{1,2}}$ die Grenze Null:

$$\beta_{Dn_1} = \frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_{y_n}} , \qquad \beta_{Dn_2} = \frac{\omega_n^{(2)}}{\omega_{y_n}} . \tag{14}$$

Die so gekennzeichneten Drucklasten $\beta_{Dn_{1,2}}$ sind die „Drehknicklasten" des Stabes von einfach-symmetrischem Profil und bestimmen seine elastische Stabilitätsgrenze. Eine Steigerung der Belastung über die Grenze (14), für die das kleinste β_{D_n} $(n = 1)$ maßgebend ist, ist nicht möglich, wenn der Stab unter der statischen Last gerade oder unendlich wenig ausgebogen bleiben soll. Nach (14) sind die Quadrate der (dimensionslos gemachten) Eigenfrequenzen $\omega_n^{(1,2)}/\omega_{y_n}$ bei fehlender Längslast gerade gleichgroß wie die (dimensionslosgemachten) Drehknicklasten $\beta_{Dn_{1,2}}$. Diese können also auch nach (12') oder mit Hilfe des Frequenzkreises bestimmt werden [1].

c) Träger mit unsymmetrischer Profilform. Für unsymmetrische Profile ($y_M \neq 0$, $z_M \neq 0$) gelten, wenn wir den rotatorischen Trägheitseinfluß mitberücksichtigen und auf beliebige rechtwinklige Querschnittsachsen beziehen, die mit den Hauptachsen den Winkel α einschließen mögen, die vollständigen Gleichungen (1). Sie gehen nach Einführen der Lösungsansätze (6) mit den Bezeichnungen (8) über in das homogene Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
&A_n\left[\frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2} + \frac{y_M^2}{i_P^2} + \varepsilon\frac{z_M^2}{i_P^2} - 2\lambda\frac{y_M z_M}{i_P^2} - \frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2}\right] - B_n\left[\varepsilon\frac{z_M}{i_P^2/l} - \lambda\frac{y_M}{i_P^2/l}\right] + C_n\left[\frac{y_M}{i_P^2/l} - \lambda\frac{\varepsilon_M}{i_P^2/l}\right] = 0 ,\\
&-A_n\left[\varepsilon\frac{z_M}{l} - \lambda\frac{y_M}{l}\right] + B_n\left[\varepsilon - \frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2}\left(1 + \varepsilon\frac{i_y^2}{l^2}n^2\pi^2\right)\right] + C_n\lambda\left[1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2}\frac{i_y^2}{l^2}n^2\pi^2\right] = 0 ,\\
&A_n\left[\frac{y_M}{l} - \lambda\frac{z_M}{l}\right] + B_n\lambda\left[1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2}\frac{i_y^2}{l^2}n^2\pi^2\right] + C_n\left[1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2}\left(1 + \frac{i_y^2}{l^2}n^2\pi^2\right)\right] = 0 .
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Nullsetzen der Koeffizientendeterminante liefert die Frequenzgleichung

$$a_1\frac{\omega_n^6}{\omega_{y_n}^6} - a_2\frac{\omega_n^4}{\omega_{y_n}^4} + a_3\frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2} - a_4 = 0 \tag{16}$$

mit den Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= 1 + \varrho_n\left[1 + \varepsilon + \varrho_n(\varepsilon - \lambda^2)\right] ,\\
a_2 &= a_1\left[\frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2} + \gamma\right] + 1 + \varepsilon + 2\varrho_n(\varepsilon - \lambda^2) ,\\
a_3 &= (1+\varepsilon)\frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2} + (\varepsilon - \lambda^2)\left[\left(\left(1 + \frac{y_M^2}{i_P^2} + \frac{z_M^2}{i_P^2}\right) + \varrho_n\left(2\frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2} + \gamma\right)\right)\right] ,\\
a_4 &= (\varepsilon - \lambda^2)\frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2} ,
\end{aligned}\right\} \tag{17a}$$

wobei

$$\gamma = \frac{y_M^2}{i_P^2} + \varepsilon\frac{z_M^2}{i_P^2} - 2\lambda\frac{y_M z_M}{i_P^2} , \qquad \varrho_n = \frac{i_y^2}{l^2}n^2\pi^2 \tag{17b}$$

bedeutet. Zwischen J_y, J_z, J_{yz} und den Hauptträgheitsmomenten, die wir mit J_1, J_2 bezeichnen

[1] S. *R. Kappus* a. a. O. S. 449.

wollen, besteht bekanntlich der Zusammenhang

$$\left.\begin{aligned} J_y &= J_1 \cos^2\alpha + J_2 \sin^2\alpha\,, \\ J_z &= J_1 \sin^2\alpha + J_2 \cos^2\alpha\,, \\ J_{yz} &= \frac{1}{2}(J_1 - J_2)\sin 2\alpha\,. \end{aligned}\right| \qquad (18)$$

Gleichung (16) ist in $\omega_n^2/\omega_{y_n}^2$ kubisch und bestimmt die drei Eigenfrequenzen $\omega_n^{(1)}$, $\omega_n^{(2)}$, $\omega_n^{(3)}$ der n-ten Schwingungsform. Sie enthält sechs Parameter, von denen uns vor allem die Schubmittelpunktsabstände y_M, z_M, als Ausdruck für die Unsymmetrie der Profilform, interessieren. Deren qualitativer Einfluß auf die Lage der Eigenfrequenzen läßt sich, da die Frequenzen als quadratische Funktionen der y_M, z_M in jedem Kurvenast nur einen Extremwert annehmen können, übersichtlich in folgender Tabelle zusammenfassen:

		Verhalten im Nullpunkt			Grenzwerte für $y_M \to \infty$ und $z_M \to \infty$		
		$\frac{\omega_n^{(1)2}}{\omega_{y_n}^2}$	$\frac{\omega_n^{(2)2}}{\omega_{y_n}^2}$	$\frac{\omega_n^{(3)2}}{\omega_{y_n}^2}$	$\frac{\omega_n^{(1)2}}{\omega_{y_n}^2}$	$\frac{\omega_n^{(2)2}}{\omega_{y_n}^2}$	$\frac{\omega_{y_n}^{(3)2}}{\omega_{y_n}^2}$
$\eta < 1 < \varepsilon$	y_M variabel, z_M = konst. $\neq 0$	Min.	Max.	Wpt.	ε	0	∞
	y_M = konst. $\neq 0$, z_M variabel	Wpt.	Max.	Min.	1	0	∞
$1 < \eta < \varepsilon$	y_M variabel, z_M = konst. $\neq 0$	Max.	Min.	Wpt.	0	ε	∞
	y_M = konst. $\neq 0$, z_M variabel	Wpt.	Max.	Min.	0	1	∞
$1 < \varepsilon < \eta$	y_M variabel, z_M = konst. $\neq 0$	Max.	Min.	Wpt.	0	∞	ε
	y_M = konst. $\neq 0$, z_M variabel	Wpt.	Min.	Max.	0	∞	1

(Wpt. = Wendepunkt mit verschwindender Krümmung; $\eta = \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}$)

Es zeigt sich also (Abb. 7 u. 8): Der qualitative Verlauf der Eigenfrequenzen eines Stabes von unsymmetrischer Profilform in Abhängigkeit von den Schubmittelpunktskoordinaten y_M, z_M ist festgelegt durch das Größenverhältnis der Eigenfrequenzen des zugeordneten doppelt-symmetrischen Stabes, die sich nach (8) berechnen. Unabhängig davon, ob „Biegefrequenz" oder „Torsionsfrequenz", nimmt die höchste der drei Eigenfrequenzen mit wachsendem y_M (oder z_M) zu, die tiefste ab; der mittlere Eigenwert geht asymptotisch in ω_{z_n} (oder in ω_{y_n}) über. An keiner Stelle schneiden sich die Frequenzkurven, die drei Frequenzen $\omega_n^{(m)}$ sind also für jedes beliebige Wertepaar y_M, z_M ($y_M \neq 0$, $z_M \neq 0$) voneinander verschieden. Bei den einfach-symmetrischen Profilen ($y_M = 0$ oder $z_M = 0$) zeigt sich ein davon abweichendes Verhalten. Die Biegefrequenz $\omega_n^{(3)} = \omega_{z_n}$ (oder $\omega_n^{(1)} = \omega_{y_n}$) ist hier von den beiden anderen unabhängig und bleibt von einer Vergrößerung der Koordinate y_M (oder z_M) unbeeinflußt. Von den beiden anderen (von y_M oder z_M abhängigen) Frequenzen geht die niedrigere gegen Null, die höhere gegen Unendlich. Es können also hier durchaus zwei der drei Eigenfrequenzen für einen bestimmten Wert von y_M (oder z_M) übereinstimmen. Die mindeste Kopplung (Unsymmetrie) reicht aber aus, um die Frequenzen auseinanderzutreiben und so die Übereinstimmung von zwei Eigenfrequenzen zu verhindern.

In Abb. 9 ist noch der Einfluß der rotatorischen Trägheit bei unsymmetrischen Profilen gezeigt. Aufgetragen ist das Verhältnis der Eigenfrequenzen $\omega_n^{(m)}$ zu den Eigenfrequenzen $\omega_{n_0}^{(m)}$, die sich bei vernachlässigter Rotationsträgheit errechnen. Es zeigt sich hier nichts Neues: die Frequenzen nehmen mit wachsender Ordnung n der Schwingungsform ab, und zwar werden die von Hause aus höheren Frequenzen stärker abgemindert als die tieferen. Für die niederen Eigen-

werte ($n = 1, 2$) ist der Unterschied vernachlässigbar klein, bei den höheren kann er sehr merklich werden, für $n = 10$ annähernd 40 v. H.

Von der (willkürlichen) Lage des Bezugssystems hängen die Eigenfrequenzen nicht ab; sie sind ihrem Wesen als „Eigenwerte" entsprechend invariant gegenüber einer Drehung α des Bezugssystems. Man kann dies nachweisen, wenn man beachtet, daß bei einer Drehung sich in (16) nicht nur die J_y, J_z, J_{yz} nach (18), sondern auch die Schubmittelpunktsabstände y_M, z_M gemäß

$$y_M = y_{M_0} \cos\alpha + z_{M_0} \sin\alpha, \quad z_M = -y_{M_0} \sin\alpha + z_{M_0} \cos\alpha .$$

ändern. Hier bezeichnen y_{M_0}, z_{M_0} die in Richtung der Hauptachsen gemessenen Koordinaten von M.

2. Mechanisch gekoppelte Schwingungen. Unter „mechanischer Kopplung" verstehen wir eine Kopplung der Verschiebungsgrößen infolge der äußeren Lasten. Sie kann abhängen von der Größe und Verteilung, oder auch von der Anordnung der Lasten. Im zweiten Falle wollen wir von Massenkopplung, im ersten aus einem sofort zu erläuternden Grunde von Biegekopplung sprechen.

Biegekopplung nennen wir die Erscheinung, daß ein in einer Ebene durch Querlasten vorgekrümmten Stab bei einer Ausbiegung senkrecht zu dieser Ebene gleichzeitig eine Drehung (Torsion) erfährt, die dadurch entsteht, daß die infolge der Vorkrümmung gedrückten Stabfasern eine seitliche Ausbiegung zu vergrößern, die gezogenen zu verkleinern suchen. Das Ergebnis ist eine von Ort zu Ort veränderliche Schiefstellung der Querschnitte, also eine Verwindung des Stabes.

Bei der Massenkopplung rührt die Kopplung von zusätzlichen Trägheitsgliedern her: von den bezüglich der Schwerachse exzentrisch angeordneten äußeren (mit Masse behafteten) Lasten. Ein praktisch wichtiges Beispiel ist der längs des Obergurtes gleichförmig belastete querschwingende Stab.

Beide Koppelerscheinungen sind unabhängig von der Querschnittsform, treten also bei symmetrischen wie bei unsymmetrischen Profilen auf.

Die Frequenzen mechanisch gekoppelter Systeme können nicht mehr als Eigenfrequenzen bezeichnet werden, da sie Funktionen der äußeren Belastung sind, die jeden beliebigen Wert annehmen kann. Wie vorne beim geometrisch gekoppelten Stab wollen wir aber auch hier von „Biege"- und „Torsions"frequenzen sprechen und darunter die Frequenzen verstehen, die (beim doppelt-symmetrischen Stab, den wir hier ausschließlich betrachten) für verschwindende Belastung in die bekannten Biege- und Torsions(eigen)frequenzen ω_{y_n}, ω_{T_n}, ω_{z_n} (8) übergehen.

Im folgenden untersuchen wir die Schwingungen um die statische Gleichgewichtslage. Wir zählen also von dort aus die Verschiebungsgrößen χ, v, w und können dann in den Verschiebungsdifferentialgleichungen (33) die inhomogenen Glieder der rechten Seite streichen. Wir legen noch die $\hat{y}$-Achse in die Lotrechte und verstehen unter $\mathfrak{p}$ eine mit Masse behaftete Streckenlast; dann ist, wenn $\mathfrak{p}$ in der vertikalen Symmetrielinie angreift, $p_2 = e_2 = 0$. Mit $y_M = z_M = 0$ kommen wir nach Einführen der Ansätze (2), der Abkürzungen (4) und

$$\mu_y = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\hat{M}_y l}{EJ_y}, \qquad \mu_z = \frac{\hat{M}_z l}{EJ_y}, \qquad \psi_p = \frac{p_1 l^4}{g E J_y}$$

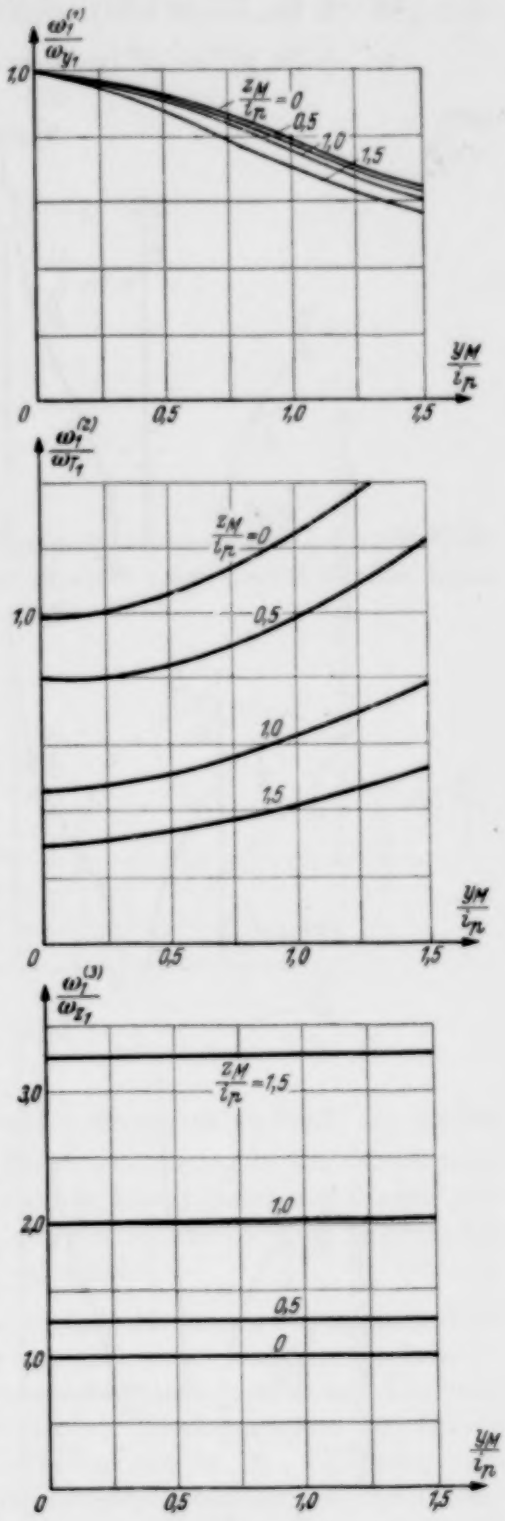

Abb. 7. Grundfrequenzen $\omega_1^{(m)}$ eines Trägers mit unsymmetrischer Profilform.

mit ξ als unabhängiger Veränderlicher, auf das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\chi^{IV} - \nu^2\chi'' + \mu_y\,\eta_y^2\,\nu^2 v'' + \mu_z\,\eta_y^2\,\nu^2 w'' + \psi_P\,\frac{g}{l}\,\frac{e}{l}\,\nu^2\eta_y^2\,\chi - \omega^2\left(\psi_T + \psi_P\,\nu^2\eta_y^2\,\frac{e^2}{l^2}\right)\chi \\
&\qquad - \omega^2\psi_P\,\frac{e}{l}\,\nu^2\eta_y^2\,w = 0\,, \\
&\varepsilon\,v'' + (\mu_y\,\chi)'' - \omega^2\,(\psi_y + \psi_P)\,v = 0\,, \\
&w'' + (\mu_z\,\chi)'' - \omega^2\,(\psi_y + \psi_P)\,w - \omega^2\,\psi_P\,\frac{e}{l}\,\chi = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

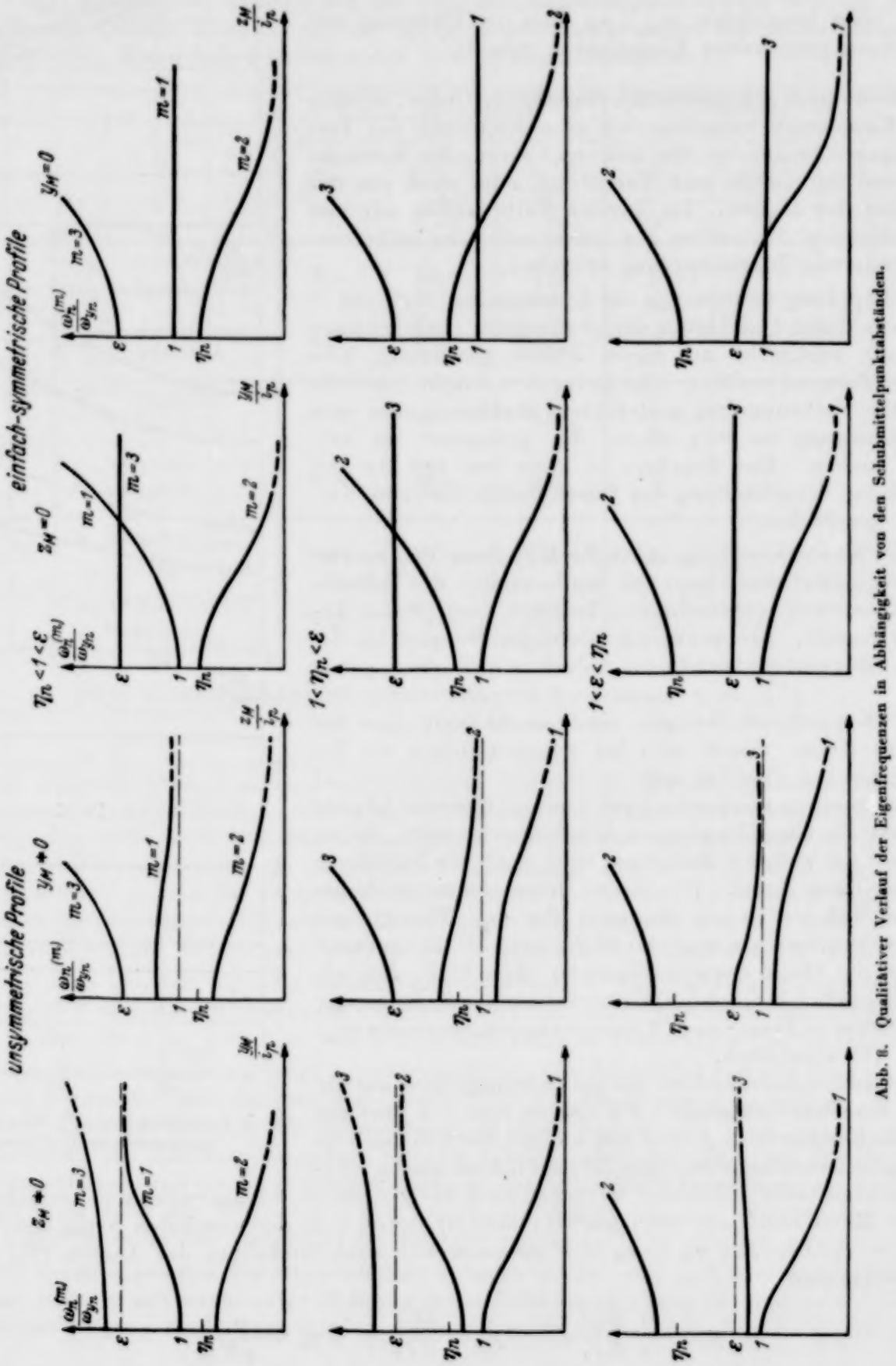

Abb. 8. Qualitativer Verlauf der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit von den Schubmittelpunktabständen.

(g = Erdbeschleunigung = 981 cm/sec²). Diese Gleichungen lösen wir getrennt für die drei verschiedenen Arten von mechanischer Kopplung. Dabei setzen wir wie bisher unbeschränkte Gültigkeit des *Hooke*schen Gesetzes voraus.

a) Biegekopplung; Einfluß eines konstanten Biegemoments. Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall eines in der $(\hat{x}, \hat{y})$-Ebene wirkenden Biegemomentes $\hat{M}_z = M =$ konst ($\hat{M}_y = 0$). Die zweite Gleichung (19) entkoppelt sich dann, die erste und dritte gehen mit der Bezeichnung $\mu = Ml/EJ_y$ über in

$$\left.\begin{aligned} &\chi^{IV} - \nu^2 \chi'' + \mu\, \nu^2\, \eta_y^2\, w'' - \omega^2\, \varphi_T\, \chi = 0\,, \\ &w^{IV} + \mu\, \chi'' - \omega^2\, \varphi_y\, w = 0\,. \end{aligned}\right| \qquad (20)$$

Mit den Lösungsansätzen (6) erhält man daraus unter Beachtung von

$$\nu^2\, \eta_y^2\, \frac{\varphi_y}{\varphi_T} = \frac{1}{i_p^2/l^2} \quad \text{und mit} \quad \mu_{k_n}^2 = \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\, \frac{i_p^2}{l^2}\, n^4\, \pi^4$$

nach kurzer Rechnung für die Frequenzquadrate

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\right)^2 + 4\,\frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\,\frac{\mu^2}{\mu_{k_n}^2}}\,,$$

eine Beziehung, die wieder graphisch mit Hilfe des Frequenzkreises ausgewertet werden kann

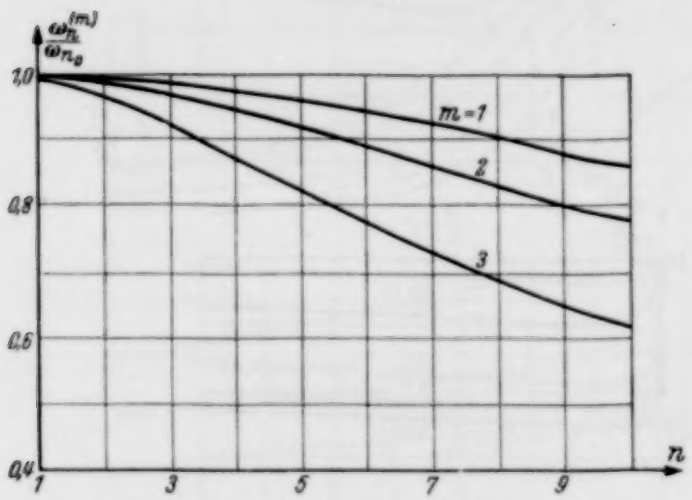

Abb. 9. Einfluß der Rotationsträgheit auf die Eigenfrequenzen.

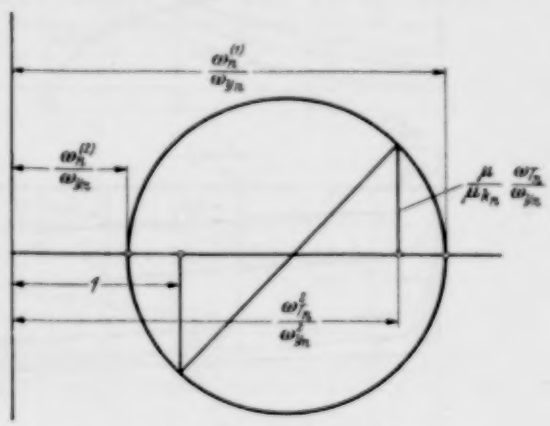

Abb. 10. Frequenzkreis.

(Abb. 10). Für $\mu = \mu_{k_n}$ wird die eine (von Hause aus niedrigere) Frequenz zu Null, die andere gleich $\sqrt{\omega_{y_n}^2 + \omega_{T_n}^2}$; die zweite Biegefrequenz (Frequenz der Biegeschwingung in der Momentenebene) bleibt unberührt von der Größe des aufgebrachten Moments, sie ist gleich der Biegeeigenfrequenz ω_{zn}. Dabei bezeichnet μ_{k1} das Kippmoment des doppelt-symmetrischen Stabes, bei dessen Erreichen der statisch beanspruchte Träger seitlich ausweicht.

b) Massenkopplung. Die Differentialgleichungen für den Fall der reinen Massenkopplung (d. h. bei Vernachlässigung des Biegeeinflusses) erhalten wir aus (19), wenn wir dort an äußeren Lasten nur solche beibehalten, die in Verbindung mit der Exzentrizität e/i_p auftreten. Die auch hier Differentialgleichungen und Randbedingungen befriedigenden Lösungsansätze (6) führen dann nach Einsetzen in die so abgeänderten Gleichungen (19) auf ein in A_n, C_n homogenes Gleichungssystem, aus welchem durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante die Frequenzgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\omega_n^4}{\omega_{y_n}^4}\left[1 + \frac{P}{P_0}\left(1 + \frac{e^2}{i_p^2}\right)\right] - \frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2}\left[1 + \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2} + \frac{P}{P_0}\left(\frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2} + \frac{e^2}{i_p^2}\right)\right] \\ &\quad + \frac{P}{P_0}\left(1 + \frac{P}{P_0}\right)\frac{e}{i_p}\,\alpha_n\Bigg] + \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2} + \frac{P}{P_0}\,\frac{e}{i_p}\,\alpha_n = 0 \end{aligned}\right| \qquad (21)$$

folgt. Dabei wurde, um den Gleichungen eine zweckmäßige dimensionslose Form zu geben die Stabmasse pro Längeneinheit ϱF durch das Eigengewicht p_0 (kg/cm) des Stabes ausgedrückt,

so daß wir mit $\varrho F = p_0/g$, $\psi_0 = \dfrac{p_0 l^4}{g E J_y}$, $\dfrac{\psi_p}{\psi_0} = \dfrac{p}{p_0}$ für die Größen ψ_y und ψ_T (4) $\psi_y = \psi_0$ und $\psi_T = \psi_0 \nu^2 \eta_y^2 \dfrac{i_p^2}{l^2}$ setzen konnten. α_n ist eine Abkürzung für $\dfrac{g}{i_p \omega_{y_n}^2}$.

Aus (21) lassen sich die Biege- und Torsionsfrequenzen in Abhängigkeit von p/p_0 und e/i_p berechnen. Dabei zeigt sich allgemein für das Verhalten der Frequenzen folgendes Bild: Die Frequenzen sind im Bereich kleiner Lastparameter ($0 < p/p_0 \lesssim 4$) sehr empfindlich hinsichtlich einer Erhöhung der Last, und zwar werden hier sowohl die Biege- als auch die Torsionsfrequenzen sehr stark abgemindert, die Biegefrequenzen bemerkenswerterweise unabhängig von der Exzentrizität mit einem Gefälle $\dfrac{d}{d(p/p_0)}\left(\dfrac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\right) = -1$. Die Abminderung der Torsionsfrequenzen ist linear in p/p_0 mit einem Gefälle, das im wesentlichen von e/i_p und dem Frequenzverhältnis $\omega_{T_n}^2/\omega_{y_n}^2$

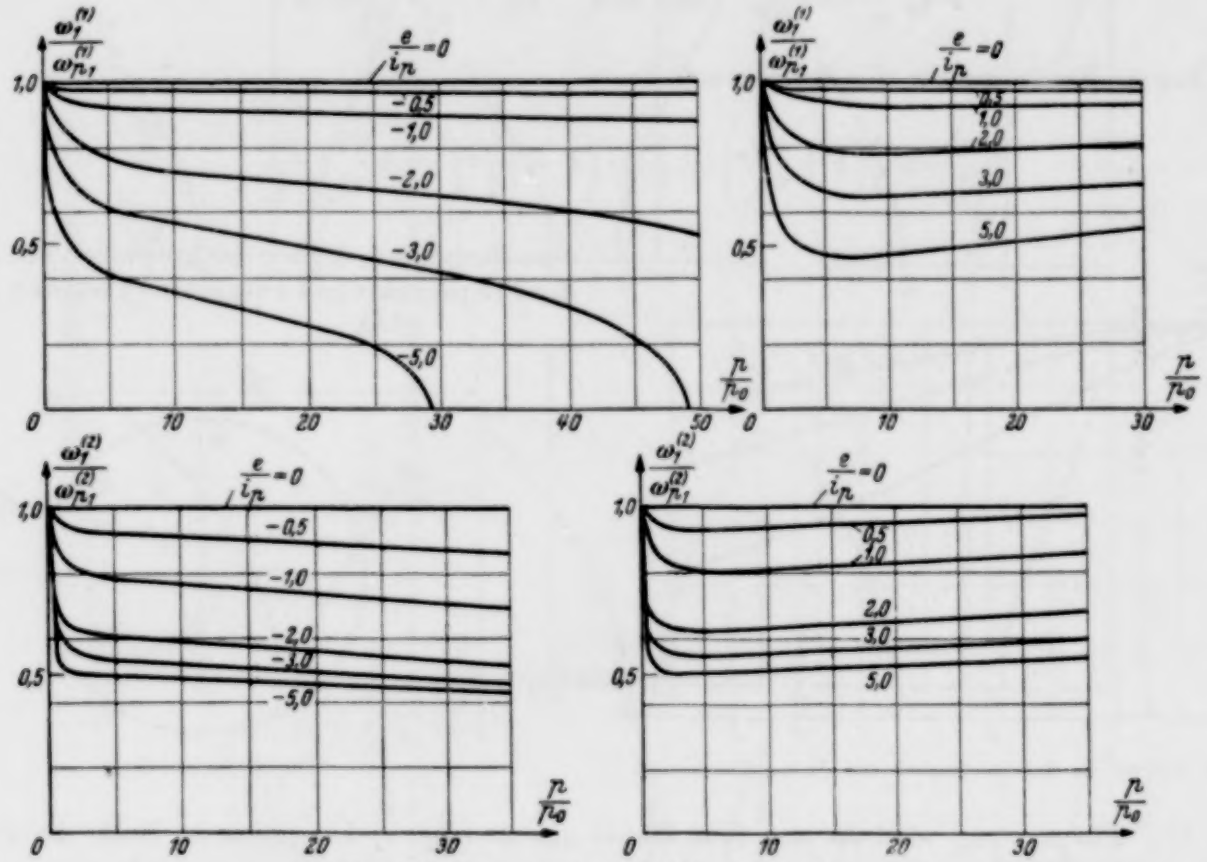

Abb. 11a. „Biegefrequenzen". Abb. 11b. „Torsionsfrequenzen".

abhängig ist. Für einen bestimmten kritischen Wert $p/p_0 \to p_k/p_0$ wird eine der beiden Frequenzen zu Null; dieser Wert ergibt sich als Nullstelle des in der geschweiften Klammer von (21) stehenden Ausdrucks

$$\frac{p_k}{p_0} = -\frac{1}{e/i_p}\,\frac{1}{\alpha_n}\,\frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}. \tag{23}$$

Da p/p_0 nur positive Werte annehmen kann, ist (23) nur im Falle negativer Exzentrizitäten erfüllbar, d. h. bei Lastengriff oberhalb des Schwerpunktes. Es bezeichnet p_k/p_0 diejenige kritische Last, bei der, ohne Massenkräfte, gerade noch Gleichgewicht zwischen den (auslenkenden) äußeren Kräften und den (rückführenden) inneren elastischen Kräften möglich ist.

Die Abhängigkeit der Frequenzen von der Exzentrizität e/i_p im Bereich kleiner e/i_p ist weniger ausgeprägt als für kleine Querlastparameter p/p_0. Die Biegefrequenzen besitzen im Nullpunkt ($e/i_p = 0$) ein Extremum, und zwar ein

$$\left.\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\} \quad \text{für} \quad \frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\left(1+\frac{p}{p_0}\right) \gtrless 1. \tag{24}$$

Zu- oder Abnahme der Frequenzen mit wachsendem e/i_p hängt also nicht nur vom Größenverhältnis $\omega_{T_n}/\omega_{y_n}$ ab, sondern wesentlich auch von der Größe der Streckenlast. Das Extremum

der Torsionsfrequenzen ist gegen die Nullstelle $e/i_p = 0$ um einen (i. a. kleinen) Betrag

$$\frac{e_m}{i_p} = \frac{1}{2}\,\alpha_n \frac{\left(1+\frac{p}{p_0}\right)\frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2} - 1}{\frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2}\left(\frac{\omega_n^2}{\omega_{y_n}^2} - 1\right)} \tag{25}$$

verschoben (die Kurve $\omega_n^2/\omega_{y_n}^2 = f\,(e/i_p)$ besitzt im Nullpunkt eine immer positive Steigung $p/p_0 \cdot \alpha_n$). Da ω_n/ω_{y_n} für eine Exzentrizität $e/i_p \ll 1$ näherungsweise mit $\omega_{T_n}/\omega_{y_n}$ übereinstimmt und wir daher in (25) $\omega_n^2/\omega_{y_n}^2$ mit guter Näherung durch $\omega_{T_n}^2/\omega_{y_n}^2$ ersetzen können, heißt dies auf Grund von (24), daß das Extremum nach der Seite positiver e/i_p rückt, wenn die Biegefrequenz im Nullpunkt ein Maximum hat und gleichzeitig $\omega_{T_n}^2/\omega_{y_n}^2 > 1$ ist. In diesem Falle

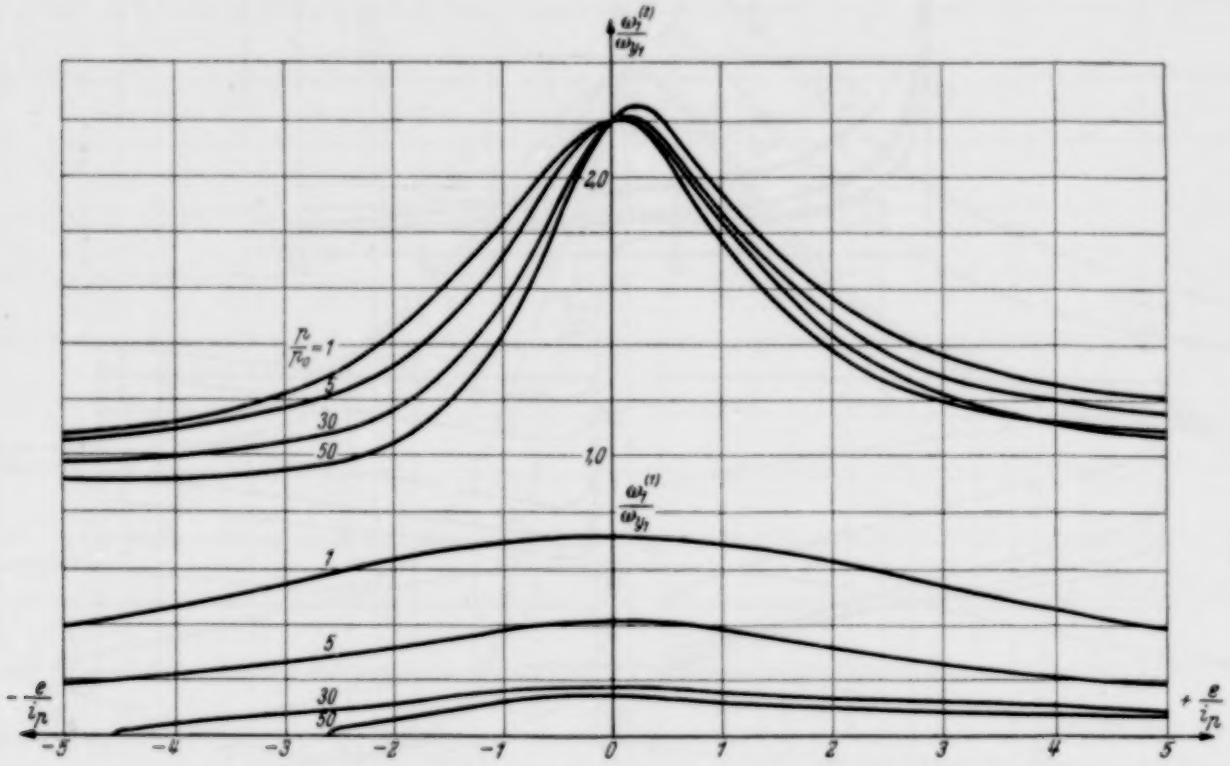

Abb. 12. „Torsions- und Biegefrequenzen in Abhängigkeit von der Exzentrizität des Lastangriffs.

hat dann die Torsionsfrequenz an der Extremstelle ebenfalls ein Maximum; das folgt aus der allgemeinen für die Torsionsfrequenzen geltenden Extremalbedingung

$$\left.\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \\ \text{Minimum}\end{matrix}\right| \quad \text{für} - \frac{\frac{p}{p_0}\frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\left(\frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2} - 1\right)}{\frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2}\frac{p}{p_0} + \left(\frac{\omega_{T_n}^2}{\omega_{y_n}^2} - 1\right)} \lessgtr 0 \tag{26}$$

[(26) ist eine Näherungsformel, die aber in allen Fällen, außer für $\omega_{T_n}^2/\omega_{y_n}^2 \backsimeq 1$, brauchbar ist; also bei allen gebräuchlichen offenen Profilen.]

Die beiden Frequenzen $\omega_n^{(1)}$, $\omega_n^{(2)}$ streben im Falle wachsender (positiver) Exzentrizitäten $(e/i_p \to \infty)$ den Grenzwerten

$$\frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_{y_n}} = 0\,, \qquad \frac{\omega_n^{(2)}}{\omega_{y_n}} = 1$$

zu. [Die negativen Exzentrizitäten lassen sich (bei konstanter Last) nicht beliebig vergrößern, sondern werden durch die Grenzexzentrizität $-e_k/i_p$, die sich bei vorgegebenem p/p_0 aus (23) berechnet, beschränkt.] Die an der Stelle $e/i_p = 0$ höhere Frequenz strebt dem Grenzwert 1, die tiefere dem Grenzwert Null zu. Es kann also entweder die „Biege"frequenz oder auch die Torsions"frequenz in die Biegeeigenfrequenz übergehen.

Den Verlauf der Biege- und Torsionsfrequenzen eines vorgegebenen Trägers in Abhängigkeit von p/p_0 und e/i_p für $n = 1$ zeigen Abb. 11 u. 12. In Abb. 11a, b ist das Verhältnis ω_n/ω_{p_n} aufgetragen, wo ω_{p_n} die Frequenz des belasteten Stabes für $e/i_p = 0$ bedeutet. Die Kurven geben so unmittelbar ein Maß für den Koppeleinfluß. Abb. 12 zeigt die Abhängigkeit von der Exzentrizität.

c) Überlagerte Massen- und Biegekopplung. Ein elastisches System, wie es in Ziff. 2b) behandelt wurde — denken wir z. B. an einen in waagerechter Ebene schwingenden gleichförmig belasteten Träger —, weist neben Massenkopplung immer auch infolge der durch

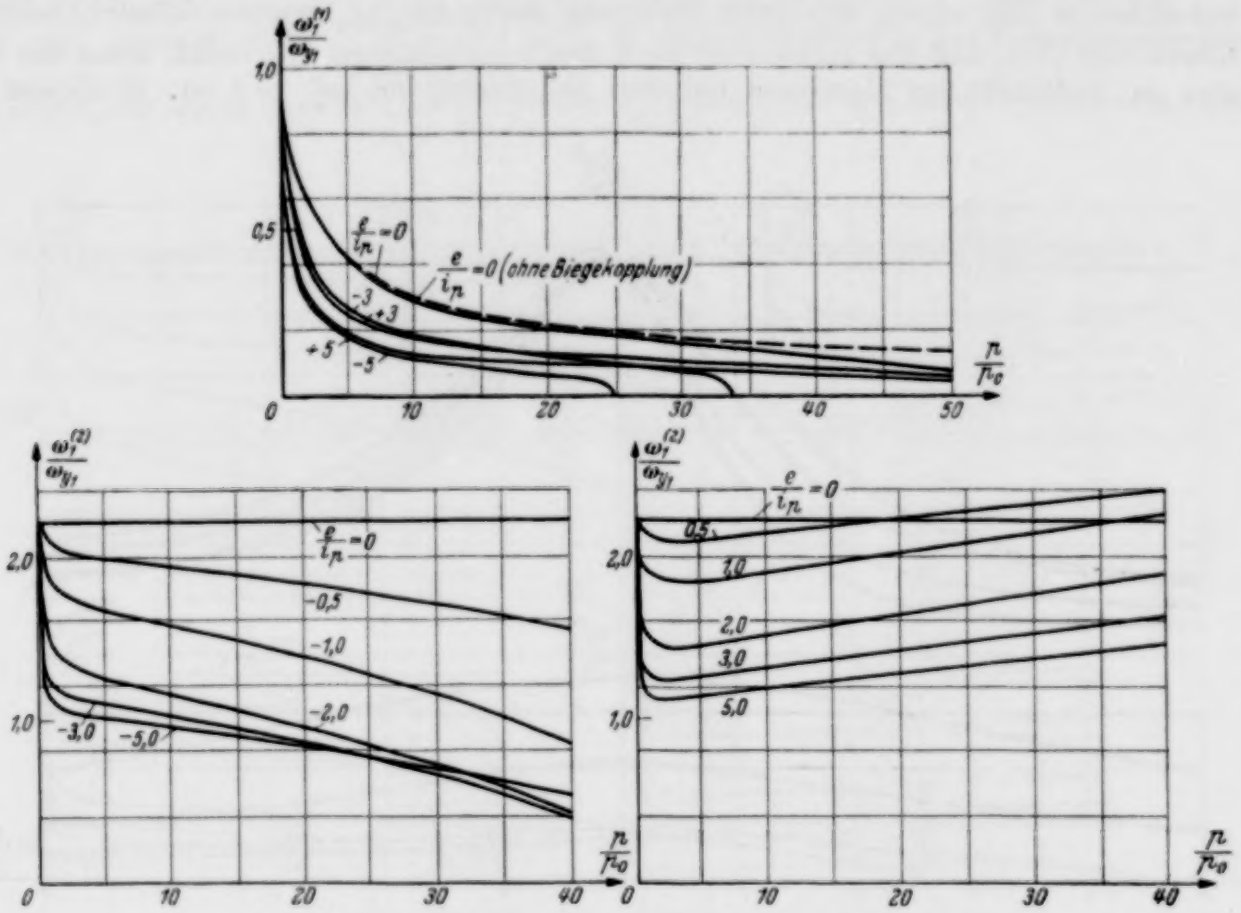

Abb. 13a. „Biegefrequenzen". Abb. 13b. „Torsionsfrequenzen".

die Querlast erzeugten Biegemomente $\hat{M}_z$ Biegekopplung auf [s. Gleichung (19)]. Es ist

$$\mu_z = \frac{\hat{M}_z\, l}{E J_y} \equiv \mu = -\frac{1}{2}(\psi_0 + \psi_p)(\xi - \xi^2)\frac{g}{l}\,. \tag{27}$$

Dieser Einfluß läßt sich mit Hilfe eines Näherungsverfahrens bestimmen, das darin besteht, in die Minimalbedingung (I, 64) des *Hamilton*schen Prinzips in Analogie zum *Ritz*schen Verfahren für χ und w zwei periodische, die geometrischen Randbedingungen erfüllende Funktionenfolgen

$$\chi = \sum A_n \sin n\pi\xi \sin \omega t, \qquad w = \sum C_n \sin n\pi\xi \sin \omega t \tag{28}$$

einzuführen. Integration und Variation, bei der die Verschiebungsvariationen $\delta\chi$, δw durch die Parametervariationen δA_n, δC_n ersetzt werden, liefert dann $2n$ homogene Gleichungen, aus welchen sich die Verhältnisse A_n/C_n und die Frequenzen berechnen lassen. Im folgenden geben wir nur kurz die Ergebnisse der Rechnung an.

Unter Beschränkung auf je das erste Reihenglied in (28) erhalten wir für die Grundfrequenz die Bestimmungsgleichung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\omega_1^4}{\omega_{y_1}^4}\left[1+\frac{p}{p_0}\left(1+\frac{e^2}{i_p^2}\right)\right] - \frac{\omega_1^2}{\omega_{y_1}^2}\left[1+\frac{\omega_{T_1}^2}{\omega_{y_1}^2}+\frac{p}{p_0}\left(\frac{e^2}{i_p^2}+\frac{\omega_{T_1}^2}{\omega_{y_1}^2}\right)+\left(1+\frac{p}{p_0}\right)\frac{p}{p_0}\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{3}{2}\right)\frac{e}{i_p}\alpha_1\right]\right.\\ \left.+\frac{\omega_{T_1}^2}{\omega_{y_1}^2}+\frac{p}{p_0}\frac{e}{i_p}\alpha_1-\left(1+\frac{p}{p_0}\right)^2\left(\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{4}\right)^2\alpha_1^2=0\,.\right\}\end{aligned} \tag{29}$$

Ihre Auswertung zeigt im Vergleich zu den Ergebnissen bei reiner Massenkopplung Folgendes: Der Verlauf der Biegefrequenzen ist auch im Bereich kleiner Lasten abhängig von der Exzentrizität, ebenfalls weisen die Torsionsfrequenzen eine zusätzliche, wenn auch geringfügige Abhängigkeit von e/i_p auf. Bei Steigerung der Querlast erreicht p/p_0 einen kritischen Wert, für den $\omega_1^{(1)}$ den Wert Null annimmt. Das System wird instabil; die zugehörige kritische Last (Kipplast) p_k/p_0 berechnet sich aus

$$\frac{p_k^2}{p_0^2} - \frac{p_k}{p_0}\left(\frac{e}{i_p}\frac{1}{\alpha_1 \cdot 1{,}15} - 2\right) + \left(1 - \frac{1}{\alpha_1^2 \cdot 1{,}15}\frac{\omega_{T_1}^2}{\omega_{y_1}^2}\right) = 0\,.$$

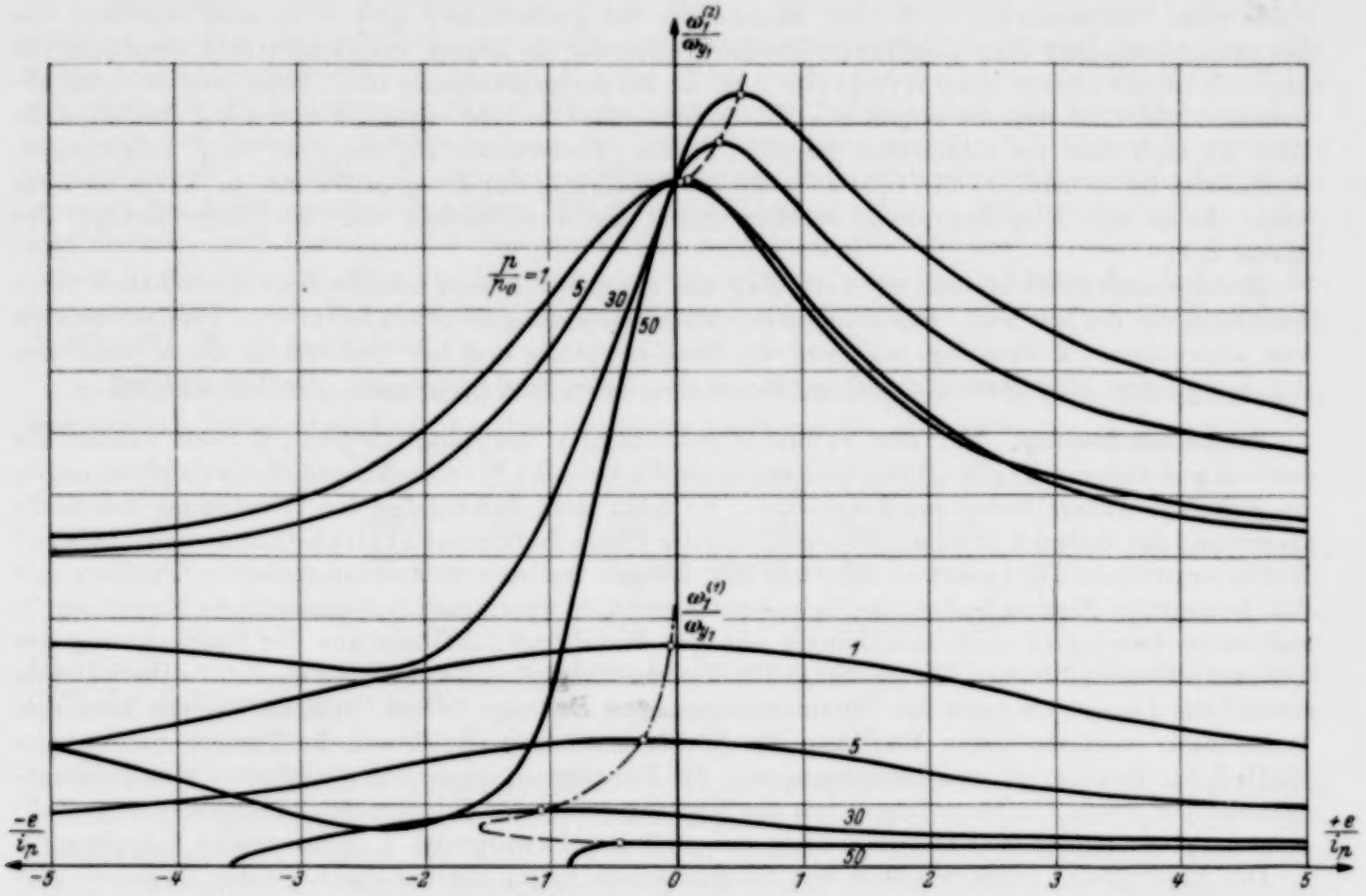

Abb. 14. „Torsions- und Biegefrequenzen" in Abhängigkeit von der Exzentrizität des Lastangriffs.

Instabilität kann hier also auch für positive Exzentrizitäten eintreten, und zwar immer dann wenn

$$\frac{p}{p_0} > \frac{\dfrac{\omega_{T_1}^2}{\omega_{y_1}^2}}{1{,}15\,\alpha_1^2} - 1$$

ist.

Die Frequenzen $\omega_{p_1}^{(1)}/\omega_{y_1}$, $\omega_{p_1}^{(2)}/\omega_{y_1}$ für reine Biegekopplung (d. h. bei Lastangriff im Schwerpunkt) weichen, solange die Querlasten genügend weit von der Kipplast entfernt liegen, nur wenig von den Eigenfrequenzen $\omega_{p_0}^{(1)}/\omega_{y_1} = 1/(1+p/p_0)$, $\omega_{p_0}^{(2)}/\omega_{y_1} = \omega_{T_1}/\omega_{y_1}$ ab, die sich bei vernachlässigter Biegekopplung berechnen. In diesem Bereich gelten für die Biege- und Torsionsfrequenzen mit guter Näherung die folgenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Biegefrequenz:} && \frac{\omega_{p_1}^{(1)}}{\omega_{y_1}} = \frac{\omega_{p_0}^{(1)}}{\omega_{y_1}} - \Delta\,, \\ &\text{Torsionsfrequenz:} && \frac{\omega_{p_1}^{(2)}}{\omega_{y_1}} = \frac{\omega_{p_0}^{(2)}}{\omega_{y_1}} + \Delta \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

mit:

$$\Delta = \frac{\left(1 + \frac{p}{p_0}\right)^2 \cdot 1{,}15\, \alpha_1^2}{\frac{\omega_{T_1}^2}{\omega_{y_1}^2}\left(1 + \frac{p}{p_0}\right) - 1}\,.$$

Die Biegefrequenzen nehmen i. a. ($\omega_{T_1}^2/\omega_{y_1}^2 > 1$) ab, die Torsionsfrequenzen zu.

Die e/i_p-Abhängigkeit ist noch ausgeprägter als vorher. Dies macht sich vor allem im Bereich kleiner negativer Exzentrizitäten bemerkbar, in welchem schon geringe Änderungen von e/ip wesentliche Änderungen der Frequenzen zur Folge haben. Die Frequenzextrema entfernen sich noch mehr vom Nullpunkt $e/i_p = 0$. Die Grenzwerte für wachsende $e/i_p \to +\infty$ sind dieselben wie bei vernachlässigter Biegekopplung. Die im Nullpunkt niedrigere Frequenz strebt asymptotisch gegen Null, die höhere geht asymptotisch in die Biegeeigenfrequenz über, kann also zu- oder abnehmen. Abb. 13 und 14 zeigen den Frequenzverlauf in Abhängigkeit von p/p_0 und e/i_p. In Abb. 13 sind hier im Gegensatz zu Abb. 11 die Frequenzen $\omega_1^{(1)}/\omega_{y_1}$, $\omega_1^{(2)}/\omega_{y_1}$ aufgetragen. Auffallend ist in Abb. 13 die sehr schnelle Abminderung der Frequenzen mit p. Diese ist aber keine Folge der Biegekopplung, sondern rührt im wesentlichen von der Vergrößerung der Masse her.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß die Frequenzen sehr empfindlich hinsichtlich einer Änderung der Auflast sind. Der Einfluß der Massenkopplung ist schon bei kleinen Exzentrizitäten von wesentlicher Bedeutung, während die Biegekopplung erst bei Querlasten, die in der Nähe der Kipplasten oder Exzentrizitäten, die in der Nähe von e_k/i_p liegen, Einfluß gewinnt.

Zusammenfassung. Für den räumlich gekrümmten ursprünglich geraden Stab werden die inneren und äußeren Kräfte (Momente), sowie die allgemeinen Verschiebungsdifferentialgleichungen für beliebige äußere Belastung hergeleitet. Es zeigt sich, daß infolge der Verwindung der Stabfasern und der dadurch bedingten Verwölbung der Querschnitte zusätzliche innere und „äußere" Kräfte entstehen. Die inneren Zusatzkräfte hängen bei den nichtsymmetrischen Profilen mit den bekannten Eigenschaften des Schubmittelpunktes zusammen („Geometrische Kopplung"); außerdem überlagern sich unabhängig von der Profilform Einflüsse aus der Verhinderung der Querschnittsverwölbung (Wölbkräfte). Die Verwindungsglieder der äußeren Kräfte, zu welchen sowohl die Längs- als auch die Torsionsspannungen Beiträge liefern, rühren von der über den Querschnitt veränderlichen Richtung der Stabfasern her: so gewinnen die Torsionsspannungen Einfluß auf Längskraft und Biegemomente, die Längsspannungen auf Querkräfte und Torsionsmoment. Weitere Einflüsse folgen aus der Verkrümmung der Schwerachse (Verformungseinfluß) und etwa vorhandenen Exzentrizitäten des äußeren Lastangriffs („Mechanische Kopplung").

Der Einfluß der geometrischen und mechanischen Kopplung auf die Lage der Torsions- und Biegefrequenzen wird am Beispiel des freiaufliegenden Trägers untersucht. Parameter sind im ersten Fall die Schubmittelpunktsabstände, im zweiten die Trägerbelastung und die Exzentrizität des Lastangriffs. Der Frequenzverlauf in Abhängigkeit von diesen Parametern kann für beide Fälle in einfacher Weise aus dem Größenverhältnis der Frequenzen bei verschwindender Kopplung qualitativ beurteilt werden. Träger mit unsymmetrischem Profil besitzen dreimal unendlich viele (von den Schubmittelpunktsabständen) abhängige Eigenfrequenzen; einfach-symmetrische zweimal unendlich viele, die übrigen sind unabhängig. Auch ein im Schwerpunkt gleichförmig belasteter doppelt-symmetrischer Stab weist z. B. neben einer (von der Biegekopplung) unabhängigen Frequenz für jede Schwingungsform zwei abhängige Frequenzen auf. Die Frequenzen gleichförmig und exzentrisch belasteter Träger hängen wesentlich von Lage und Größe der Querlasten ab. Der Biegekoppeleinfluß der Querlast erlangt hierbei erst Bedeutung, wenn die Lasten in der Nähe der Kipplast liegen. Bei mittleren Querlasten können die Frequenzen mit guter Näherung ohne Berücksichtigung der Biegekopplung berechnet werden.

(Eingegangen am 16. Dezember 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *R. Heilig*, Dortmund-Brackel, Reichshofstr. 41.

Ein Integrationsverfahren für die Berechnung der Biegespannungen achsensymmetrischer Schalen unter achsensymmetrischer Belastung.

II. Mitteilung.

Von H. Münz.

1. Einleitung. Für das am Ende der I. Mitteilung aufgestellte kanonische Differentialgleichungssystem sechster Ordnung[1] sollen nun Integrationsverfahren entwickelt werden. Die kanonischen Variabelen Q_1, Q_2, Q_3 und P_1, P_2, P_3 hatten bis auf den Dimensionsfaktor der Reihe nach folgende Bedeutung: die Verschiebung parallel zur Schalenachse, die Verschiebung senkrecht zur Schalenachse, die Verdrehung der Meridiantangente und die Schnittkraftkomponente parallel zur Schalenachse, die Schnittkraftkomponente senkrecht zur Schalenachse, das Biegemoment um die Breitenkreistangente. Da Q_1 den Charakter einer „zyklischen Koordinate" hat, und deshalb nach Kenntnis der übrigen Variabelen durch eine Quadratur gewonnen wird, da ferner P_1 als Integral über die Belastungskomponente parallel zur Schalenachse bekannt ist, brauchen wir nur die Integration des kanonischen Systems vierter Ordnung für die Variabelen Q_2, Q_3; P_2, P_3 zu betrachten.

2. Allgemeine Integrationstheorie der kanonischen Gleichungen. Allgemein hat ein lineares kanonisches Differentialgleichungssystem vierter Ordnung die Gestalt[2]

$$\left.\begin{aligned} Q_2' &= \quad f_{11}P_2 + f_{12}P_3 + f_{13}Q_2 + f_{14}Q_3 + f_{10}, \\ Q_3' &= \quad f_{12}P_2 + f_{22}P_3 + f_{23}Q_2 + f_{24}Q_3 + f_{20}, \\ P_2' &= -f_{13}P_2 - f_{23}P_3 + f_{33}Q_2 + f_{34}Q_3 + f_{30}, \\ P_3' &= -f_{14}P_2 - f_{24}P_3 + f_{34}Q_2 + f_{44}Q_3 + f_{40}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Koeffizienten $f_{l,m}$ sind hierbei gegebene Funktionen von $\bar{\zeta}$. In unserem Gleichungssystem (7,9) der I. Mitteilung ist z. B.

$$f_{12} = f_{14} = f_{23} = f_{34} = f_{20} = 0\,.$$

In der üblichen Weise der Integration von Systemen linearer Differentialgleichungen ermitteln wir zunächst ein System von vier linear unabhängigen Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems. Setzen wir dieses als bekannt voraus, so lautet das homogene kanonische Gleichungssystem für die l-te Lösung, wenn wir mit π^l und $\varkappa^l$ eine Lösung der homogenen Gleichungen bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_2^{l\prime} &= \quad f_{11}\pi_2^l + f_{12}\pi_3^l + f_{13}\varkappa_2^l + f_{14}\varkappa_3^l, \\ \varkappa_3^{l\prime} &= \quad f_{12}\pi_2^l + f_{22}\pi_3^l + f_{23}\varkappa_2^l + f_{24}\varkappa_3^l, \\ \pi_2^{l\prime} &= -f_{13}\pi_2^l - f_{23}\pi_3^l + f_{33}\varkappa_2^l + f_{34}\varkappa_3^l, \\ \pi_3^l &= -f_{14}\pi_2^l - f_{24}\pi_3^l + f_{34}\varkappa_2^l + f_{44}\varkappa_3^l. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Werden nun die inhomogenen Gleichungen (1) der Reihe nach multipliziert mit π_2^l, π_3^l, $-\varkappa_2^l$, $-\varkappa_3^l$ und die homogenen Gleichungen (2) mit $-P_2$, $-P_3$, Q_2, Q_3, wobei die P_2, P_3; Q_2, Q_3 irgendeine Lösung des inhomogenen Systems (1) darstellen sollen, und addiert man diese Produkte, so ergibt sich

$$\frac{d}{d\bar{\zeta}}(\pi_2^l Q_2 - \varkappa_2^l P_2 + \pi_3^l Q_3 - \varkappa_3^l P_3) = \pi_2^l f_{10} - \varkappa_2^l f_{30} + \pi_3^l f_{20} - \varkappa_3^l f_{40}\,.$$

Man erhält somit für jede Lösung des homogenen Systems ein Integral des inhomogenen der Gestalt

$$\pi_2^l Q_2 - \varkappa_2^l P_2 + \pi_3^l Q_3 - \varkappa_3^l P_3 = \varphi_l \tag{3a}$$

mit

$$\varphi_l = \int (\pi_2^l f_{10} - \varkappa_2^l f_{30} + \pi_3^l f_{20} - \varkappa_3^l f_{40})\, d\bar{\zeta} + C_l \qquad (l = 1, 2, 3, 4)\,. \tag{3b}$$

---

[1] Berichtigung: Gl. (9e) $Q_2' - \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\frac{\varrho'}{\varrho}\right) Q_2 = \cdots$ statt $Q_3' - \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\frac{\varrho'}{\varrho}\right) Q_2 =$

[2] *H. Poincaré*, Les methodes nouvelles de la mécanique céleste. Bd. I, S. 166. Paris 1892.

Betrachtet man an Stelle des inhomogenen Gleichungssystems (1) das homogene System für die m-te Grundlösung und führt eine entsprechende Rechenoperation aus, so erhält man

$$\frac{d}{d\bar{\zeta}}(\pi_2^l \varkappa_2^m - \varkappa_2^l \pi_2^m + \pi_3^l \varkappa_3^m - \varkappa_3^l \pi_3^m) = 0 \qquad (l, m = 1, 2, 3, 4)\,.$$

Den Klammerausdruck nennen wir die „bilineare Kovariante" der Grundlösungen l, m und bezeichnen ihn mit $[l, m]$. Durch Integration folgt

$$[l, m] \equiv \pi_2^l \varkappa_2^m - \varkappa_2^l \pi_2^m + \pi_3^l \varkappa_3^m - \varkappa_3^l \pi_3^m = \text{konst.} \tag{4}$$

Offenbar ist $[l, m] = -[m, l]$. Die bilinearen Kovarianten sind unabhängig von der Koordinate $\bar{\zeta}$, und wir können ihren Wert an einer Stelle $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0$ berechnen, an der wir die Anfangsbedingungen für die Lösungen des homogenen Systems vorgeben. Nun erhält man ein Hauptsystem von Lösungen[1], wenn diese Anfangswerte wie folgt vorgegeben werden:

$$\begin{pmatrix} \varkappa_{20}^1 & \pi_{20}^1 & \varkappa_{30}^1 & \pi_{30}^1 \\ \varkappa_{20}^2 & \pi_{20}^2 & \varkappa_{30}^2 & \pi_{30}^2 \\ \varkappa_{20}^3 & \pi_{20}^3 & \varkappa_{30}^3 & \pi_{30}^3 \\ \varkappa_{20}^4 & \pi_{20}^4 & \varkappa_{30}^4 & \pi_{30}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Für die bilinearen Kovarianten erhalten wir hiernach die Werte

$$[1, 2] = [3, 4] = -1\,, \quad [1, 3] = [1, 4] = [2, 3] = [2, 4] = 0\,. \tag{6}$$

Ist ein solches Hauptsystem von „kanonisch konjugierten" Lösungen der homogenen Gleichungen bekannt, so wird die Berechnung der Partikularlösungen nach der Methode der Variation der Konstanten sehr einfach. Wir machen in üblicher Weise den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} Q_{2p} &= \sum_{m=1}^{4} a_m(\bar{\zeta})\, \varkappa_2^m\,, & P_{2p} &= \sum_{m=1}^{4} a_m(\bar{\zeta})\, \pi_2^m\,, \\ Q_{3p} &= \sum_{m=1}^{4} a_m(\bar{\zeta})\, \varkappa_3^m\,, & P_{3p} &= \sum_{m=1}^{4} a_m(\bar{\zeta})\, \pi_3^m\,, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wodurch die Integrale des inhomogenen Systems (3) identisch erfüllt werden müssen:

$$\sum_{m=1}^{4} a_m(\bar{\zeta})\,(\pi_2^l \varkappa_2^m - \varkappa_2^l \pi_2^m + \pi_3^l \varkappa_3^m - \varkappa_3^l \pi_3^m) = \varphi_l \qquad (l = 1, 2, 3, 4). \tag{8}$$

Da der Koeffizient von $a_m(\bar{\zeta})$ die bilineare Kovariante $[l, m]$ ist, wird nach (6)

$$\left.\begin{aligned} a_1(\bar{\zeta}) &= \varphi_2(\bar{\zeta})\,, & a_2(\bar{\zeta}) &= -\varphi_1(\bar{\zeta})\,, \\ a_3(\bar{\zeta}) &= \varphi_4(\bar{\zeta})\,, & a_4(\bar{\zeta}) &= -\varphi_3(\bar{\zeta})\,, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wobei φ_l die unbestimmten Integrale von (3b) sind.

Die vollständige Lösung des kanonischen Gleichungssystems (7, 9) der I. Mitteilung erhalten wir durch Überlagerung des Hauptsystems von Lösungen des homogenen Gleichungssystems mit der entsprechenden Partikularlösung:

$$Q_2 = \sum_{l=1}^{4} C_l\, \varkappa_2^l + Q_{2p}\,, \tag{10a}$$

$$Q_3 = \sum_{l=1}^{4} C_l\, \varkappa_3^l + Q_{3p}\,, \tag{10b}$$

$$P_2 = \sum_{l=1}^{4} C_l\, \pi_2^l + P_{2p}\,, \tag{10c}$$

$$P_3 = \sum_{l=1}^{4} C_l\, \pi_3^l + P_{3p} \tag{10d}$$

und aus den beiden Quadraturen

$$Q_1 = \int \left\{ \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{3}\, \lambda\, \frac{\frac{P_1}{\eta} + \varrho' P_2}{\varrho \sqrt{1+\varrho'^2}} - \frac{\nu}{\eta \varrho}\, Q_2 - \frac{\varrho'}{\eta}\, Q_3 \right\} d\bar{\zeta} + Q_{10}\,, \tag{11a}$$

[1] Vgl. z. B. *E. Kamke*, Differentialgleichungen reeller Funktionen, S. 174. Leipzig 1930.

$$P_1 = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{E\lambda^2}\int \varrho\sqrt{1+\varrho'^2}\,K_1\,d\bar{\zeta} + P_{10}\,. \tag{11b}$$

Die Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4, Q_{10} und P_{10} werden aus den Randbedingungen der jeweilig vorliegenden Schalenaufgabe bestimmt.

3. Ein Verfahren zur Integration der homogenen Gleichungen. Die Hauptarbeit der Integration besteht nun in der Ermittlung eines Hauptsystems von vier Lösungen des homogenen kanonischen Gleichungssystems

$$\pi_2' + \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\pi_2 = \Lambda\frac{\alpha}{\eta}\varkappa_2\,, \tag{1a}$$

$$\pi_3' + \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\pi_3 = \frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\frac{\eta}{\alpha}\varkappa_3 - \pi_2\,, \tag{1b}$$

$$\varkappa_2' - \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\varkappa_2 = \frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\frac{\eta}{\alpha}\pi_2 + \varkappa_3\,, \tag{1c}$$

$$\varkappa_3' - \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\varkappa_3 = \Lambda\frac{\alpha}{\eta}\pi_3 \tag{1d}$$

mit

$$\Lambda = \frac{\sqrt{3\,(1-\nu^2)}}{\lambda} \qquad \text{und} \qquad \alpha(\bar{\zeta}) = \frac{\sqrt{1+\varrho'^2}}{\varrho}\,.$$

Da man diese Gleichungen auch in der Form

$$\left(\frac{\eta}{\varrho^\nu}\pi_2\right)' = \Lambda\frac{\eta}{\varrho^\nu}\frac{\alpha}{\eta}\varkappa_2\,, \tag{1a*}$$

$$\left(\frac{\eta}{\varrho^\nu}\pi_3\right)' = \frac{\eta}{\varrho^\nu}\left(\frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\frac{\eta}{\alpha}\varkappa_3 - \pi_2\right), \tag{1b*}$$

$$\left(\frac{\varrho^\nu}{\eta}\varkappa_2\right)' = \frac{\varrho^\nu}{\eta}\left(\frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\frac{\eta}{\alpha}\pi_2 + \varkappa_3\right), \tag{1c*}$$

$$\left(\frac{\varrho^\nu}{\eta}\varkappa_3\right)' = \Lambda\frac{\varrho^\nu}{\eta}\frac{\alpha}{\eta}\pi_3 \tag{1d*}$$

schreiben kann, läßt sich vermöge des besonders einfachen Baues dieses Gleichungssystems eine schrittweise numerische Integration sehr bequem durchführen. Wir wollen jedoch ein Integrationsverfahren entwickeln, das dem eben angeführten in vielen Fällen überlegen sein wird, besonders dann, wenn die Neigung der Meridiantangente gegen die Schalenachse nicht allzu steil ist (vgl. die später durchgeführte Abschätzung).

Wir führen zunächst durch die kanonische Transformation

$$\frac{1}{2}(\varkappa_2 + i\,\pi_3) = \mathfrak{q}\,, \tag{2a}$$

$$\frac{1}{2}(\varkappa_2 - i\,\pi_3) = \bar{\mathfrak{q}}\,, \tag{2b}$$

$$\pi_2 + i\,\varkappa_3 = \mathfrak{p}\,, \tag{2c}$$

$$\pi_2 - i\,\varkappa_3 = \bar{\mathfrak{p}} \tag{2d}$$

mit der erzeugenden Funktion

$$V = \frac{1}{2}(\varkappa_2 + i\,\pi_3)\,\mathfrak{p} + \frac{1}{2}(\varkappa_2 - i\,\pi_3)\,\bar{\mathfrak{p}}$$

komplexe Variable ein. Die kanonischen Gleichungen (1) erhalten dann die Gestalt

$$\mathfrak{q}' - \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\bar{\mathfrak{q}} = \left(\frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\frac{\eta}{\alpha} - i\right)\frac{\mathfrak{p}}{2}\,, \tag{3a}$$

$$\mathfrak{p}' + \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\bar{\mathfrak{p}} = \Lambda\frac{\alpha}{\eta}2\,\mathfrak{q}\,, \tag{3b}$$

$$\bar{\mathfrak{q}}' - \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\mathfrak{q} = \left(\frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\frac{\eta}{\alpha} + i\right)\frac{\bar{\mathfrak{p}}}{2}\,, \tag{3c}$$

$$\bar{\mathfrak{p}}' + \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\mathfrak{p} = \Lambda\frac{\alpha}{\eta}2\,\bar{\mathfrak{q}}\,. \tag{3d}$$

Setzen wir die relative Änderung der Schalendicke η'/η gleich Null und rechnen, abgesehen von dem Glied $(1-\nu^2)$, das auch in Λ enthalten ist, mit der Querkontraktion $\nu = 0$, so ergeben sich für $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ einerseits und ihre konjugiert komplexen Größen $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathfrak{q}}$ andererseits zwei getrennte Systeme von je zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Das System (3a, b) lautet, wenn wir $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ nach (2a, c) ersetzen und wegen $\eta'/\eta = 0$ und $\nu = 0$ die Variabelen $\pi_2, \pi_3; \varkappa_2, \varkappa_3$ mit $p_2, p_3; q_2, q_3$ bezeichnen,

$$(q_2 + i\,p_3)' = \left(\frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\frac{\eta}{\alpha} - i\right)(p_2 + i\,q_3)\,, \tag{4a}$$

$$(p_2 + i\,q_3)' = \Lambda\frac{\alpha}{\eta}(q_2 + i\,p_3)\,. \tag{4b}$$

Man erkennt nun sofort, daß mit $(q_2 + i\,p_3)$ und $(p_2 + i\,q_3)$ auch $(p_3 - i\,q_2)$ und $(q_3 - i\,p_2)$ Lösungen dieses homogenen, linearen Gleichungssystems sind. Das ursprüngliche kanonische Gleichungssystem, Gl. (1), für $\eta'/\eta = 0$ und $\nu = 0$

$$p_2' = \Lambda\frac{\alpha}{\eta}q_2\,, \tag{5a}$$

$$p_3' = \frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\frac{\eta}{\alpha}q_3 - p_2\,, \tag{5b}$$

$$q_2' = \frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\frac{\eta}{\alpha}p_2 + q_3\,, \tag{5c}$$

$$q_3' = \Lambda\frac{\alpha}{\eta}p_3 \tag{5d}$$

geht also bei der Vertauschung von

$$\left.\begin{array}{lll} q_2 \text{ mit } p_3 & \text{und} & q_3 \text{ mit } -p_2 \\ p_2 \text{ mit } q_3 & & p_3 \text{ mit } -q_2 \end{array}\right| \tag{6}$$

in sich über. Es genügt folglich zur Ermittlung eines Hauptsystems von vier Lösungen des Systems (5) mit den Anfangswerten entsprechend (2, 5) die Berechnung von nur zwei Lösungen, um nach den folgenden Beziehungen alle vier zu kennen:

$$\left.\begin{array}{llll} q_2^1 = p_3^4\,, & q_3^1 = -p_2^4\,, & q_2^2 = p_3^3\,, & q_3^2 = -p_2^3\,, \\ p_2^1 = q_3^4\,, & p_3^1 = -q_2^4\,, & p_2^2 = q_3^3\,, & p_3^2 = -q_2^3\,. \end{array}\right| \tag{7}$$

In (4a) hat der komplexe Koeffizient $\left(\frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\frac{\eta}{\alpha} - i\right)$ einen wesentlich kleineren Realteil als Imaginärteil, d. h. der Realteil ist wesentlich kleiner als eins, falls die halbe Schalendicke

$$h \ll \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}\,f\sqrt{1+f'^2}\,\frac{1}{f'^2} \tag{8*}$$

ist. Der Ausdruck $f\sqrt{1+f'^2}$ bedeutet den zweiten Hauptkrümmungshalbmesser der Schalenmittelfläche (Abb. 1). Da nach den üblichen Voraussetzungen der Biegetheorie dünner Schalen die Schalendicke wesentlich kleiner sein soll als die Krümmungshalbmesser der Schalenmittelfläche, ist die Bedingung (8*) bestimmt dann erfüllt, wenn $\sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}}\frac{1}{f'^2}$ mindestens von der Größenordnung eins ist. Da f' die Steigung der Meridiantangente gegen die Schalenachse an gibt, ist die Ungleichung sicher richtig für Neigungswinkel der Meridiantangente zur Schalenachse zwischen 0 und 60°, und wir können in diesen Fällen in (4a) den Koeffizienten von $(p_2 + i\,q_3)$ immer als rein imaginär betrachten (Abb. 2). Bis zu welchen Neigungswinkeln über 60° diese Vernachlässigung noch tragbar ist, muß von Fall zu Fall entschieden werden. Für flache Schalen lassen sich andere Vernachlässigungen angeben, wie wir in Abschnitt 7 zeigen werden.

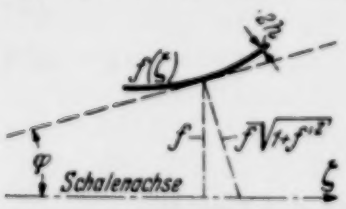

Abb. 1. Deutung von $f\sqrt{1+f'^2}$.

Das Gleichungssystem (5) erhält mit dieser Vernachlässigung die verkürzte Gestalt

$$p_2' = \Lambda\frac{\alpha}{\eta}q_2\,, \tag{8a}$$

$$p_3' = -\quad p_2\,, \tag{8b}$$

$$q_2' = \quad q_3 , \tag{8c}$$

$$q_3' = \Lambda \frac{\alpha}{\eta} p_3 . \tag{8d}$$

Über die mechanische Bedeutung dieser Vernachlässigungen, die natürlich auch für $\eta'/\eta \neq 0$ und $\nu \neq 0$ ihren Sinn haben und schon am Gleichungssystem (3) hätten diskutiert werden können, läßt sich folgendes aussagen.

Die homogenen kanonischen Gleichungen geben den Zusammenhang zwischen Schnittkräften und Verschiebungen einer Schale, die nur an den Rändern durch Momente und Kräfte senkrecht zur Achse belastet ist. Betrachten wir noch einmal die dimensionsbehafteten Gleichungen (6, 17) der I. Mitteilung, in denen p_1 und K_2 null zu setzen sind: Den obigen Vernachlässigungen entsprechend ist in (6, 17c) das Glied mit q_3 und in (6, 17e) das Glied mit p_2 zu streichen. Da (6, 17c) die Momentengleichgewichtsbedingung angibt, erkennen wir aus (6, 19), daß mit der getroffenen Vernachlässigung

$$M_\vartheta = \nu M_\varphi$$

wird. Wir sehen also, daß unter den oben diskutierten Bedingungen für die Steigung des Meridians derjenige Anteil des Ringmomentes M_ϑ, der durch die Verkrümmung $\varkappa_\vartheta$ eines Breitenkreises entsteht, wesentlich kleiner ist, als der Anteil, der infolge der Querkontraktion vom Biegemoment M_φ herrührt.

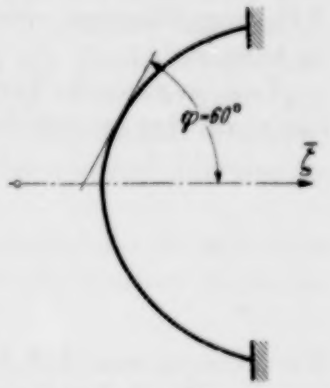

Abb. 2. Tangentenneigungswinkel $\varphi = 60°$.

Aus der Vernachlässigung in (6, 17e) folgt, wenn wir (6, 17e und 6, 17f) zusammenfassen zu

$$\frac{f' p_2}{f\sqrt{1+f'^2}} = D\left[\frac{q_1' + f' q_2'}{1+f'^2} + \nu \frac{q_2}{f}\right],$$

daß

$$\frac{q_1' + f' q_2'}{1+f'^2} = -\nu \frac{q_2}{f}$$

ist, also nach (6, 8) und (6, 9) der I. Mitteilung

$$\varepsilon_\varphi = -\nu \varepsilon_\vartheta .$$

Dies bedeutet, daß — wieder unter den oben formulierten Bedingungen — die von den Meridianlängskräften herrührenden Verformungen vernachlässigt werden können. Die dann noch auftretende „Meridiandehnung" ε_φ ist durch die Querkontraktion bei der „Ringdehnung" ε_ϑ verursacht.

Wir wollen uns nun zunächst auf solche Schalen beschränken, die der Bedingung (8*) genügen, und suchen Lösungen des Gleichungssystems (8). In integrierter Gestalt lautet dieses

$$p_2 = \Lambda \int \frac{\alpha}{\eta} q_2 \, d\bar{\zeta} + p_{20} , \tag{9a}$$

$$p_3 = -\int \quad p_2 \, d\bar{\zeta} + p_{30} , \tag{9b}$$

$$q_2 = \quad \int \quad q_3 \, d\bar{\zeta} + q_{20} , \tag{9c}$$

$$q_3 = \Lambda \int \frac{\alpha}{\eta} p_3 \, d\bar{\zeta} + q_{30} . \tag{9d}$$

Daraus folgt

$$p_3 = -\Lambda \int\int \frac{\alpha}{\eta} q_2 (d\bar{\zeta})^2 - p_{20}(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0) + p_{30} \tag{10a}$$

und

$$q_2 = \quad \Lambda \int\int \frac{\alpha}{\eta} p_3 (d\bar{\zeta})^2 + q_{30}(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0) + q_{20} . \tag{10b}$$

Die Gleichungen (10) lassen sich sehr einfach numerisch schrittweise z. B. mit einer von *Hohenemser-Prager*[1] angegebenen Formel für Doppelintegrale auswerten[2], und zwar einmal für

---

[1] *Hohenemser-Prager*, Dynamik der Stabwerke, S. 157. Berlin 1933.

[2] Es seien an mindestens drei aufeinander folgenden Intervallpunkten p_3 und q_2 bekannt. Am folgenden Intervallpunkt wird q_2 z. B. durch Extrapolation geschätzt und nach (10a) der zugehörige Wert von p_3 berechnet. Hiermit wird nach (10b) ein verbesserter Wert für q_2 berechnet.

$$q_{20} = 1 \quad \text{und} \quad p_{20} = q_{30} = p_{30} = 0$$

und einmal für

$$p_{20} = 1 \quad \text{und} \quad q_{20} = q_{30} = p_{30} = 0 .$$

Aus (9a) und (9d) ergeben sich dann die entsprechenden Lösungen für p_2 und q_3, und nach (7) die restlichen beiden Lösungen des Hauptsystems von Lösungen für das verkürzte Gleichungssystem (8). Da dieses Gleichungssystem kanonische Gestalt hat, existieren für die Lösungen auch die bilinearen Kovarianten, die wegen der getroffenen Wahl des Hauptsystems von Lösungen null bzw. eins sind entsprechend (6).

Um einen Überblick über die Größenordnung des Fehlers zu bekommen, mit dem die Lösungen von (8) gegenüber denen von (5) infolge der obigen Vernachlässigungen behaftet sind, wird man die Lösungen p_2 und q_3 des Gleichungssystems (8) in die rechten Seiten von (5b) und (5c) einführen und durch Integration erste Korrekturen für p_3 und q_2 erhalten. Sollten diese Korrekturen im Rahmen der erforderlichen Genauigkeit der Zahlenrechnung beträchtlich sein, so wird man die Lösungen des Gleichungssystems (8) als Näherungslösungen von (5) zu betrachten haben, die bei Beachtung von (6) und (7) durch Iteration zu verbessern sind. Es sei aber auch auf die Möglichkeit hingewiesen, die Schalenzone, in der solche größere Korrekturen unserer Näherungslösungen erforderlich sind, nach den Methoden des Abschnittes 7 als flache Schale zu behandeln.

Das kanonisch konjugierte Hauptsystem von Lösungen von (5) sei jetzt exakt, d. h. innerhalb der erforderlichen Genauigkeit bekannt. Die allgemeine Lösung ist dann

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= \sum_{l=1}^{4} c_l\, p_2^l , & q_2 &= \sum_{l=1}^{4} c_l\, q_2^l , \\ p_3 &= \sum_{l=1}^{4} c_l\, p_3^l , & q_3 &= \sum_{l=1}^{4} c_l\, q_3^l . \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wir erinnern uns, daß das Gleichungssystem (5) entstanden ist, indem wir in (1) η'/η und ν null setzten. Die dadurch vernachlässigten Glieder sollen jetzt durch eine Störungsrechnung berücksichtigt werden. Wir suchen an Stelle der konstanten Koeffizienten c_l von (11) solche Funktionen $c_l(\bar{\zeta})$, daß durch

$$\left.\begin{aligned} \pi_2 &= \sum_{l=1}^{4} c_l(\bar{\zeta})\, p_2^l , & \varkappa_2 &= \sum_{l=1}^{4} c_l(\bar{\zeta})\, q_2^l , \\ \pi_3 &= \sum_{l=1}^{4} c_l(\bar{\zeta})\, p_3^l , & \varkappa_3 &= \sum_{l=1}^{4} c_l(\bar{\zeta})\, q_3^l \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

das unverkürzte Gleichungssystem (1) erfüllt wird. Die *Hamilton*sche Funktion dieses Gleichungssystems spalten wir auf in

$$H = H^* + \Omega ,$$

wobei

$$H^* = \pi_2 \varkappa_3 + \frac{1}{2}\left\{ \Lambda \frac{\alpha}{\eta}(\pi_3^2 - \varkappa_2^2) + \frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\frac{\eta}{\alpha}(\pi_2^2 - \varkappa_3^2)\right\} \tag{13a}$$

die zu (5) gehörende *Hamilton*sche Funktion ist und

$$\Omega = \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\frac{\varrho'}{\varrho}\right)(\pi_2 \varkappa_2 + \pi_3 \varkappa_3) \tag{13b}$$

die Störungsfunktion. Die Gleichungen (1) lassen sich dann in folgender Weise schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \pi_2' &= \Lambda\frac{\alpha}{\eta}\varkappa_2 - \frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa_2}, & \varkappa_2' &= \frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\frac{\eta}{\alpha}\pi_2 + \varkappa_3 + \frac{\partial\Omega}{\partial\pi_2}, \\ \pi_3' &= \frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\frac{\eta}{\alpha}\varkappa_3 - \pi_2 - \frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa_3}, & \varkappa_3' &= \Lambda\frac{\alpha}{\eta}\pi_3 + \frac{\partial\Omega}{\partial\pi_3}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Kombinieren wir nun die „gestörten Gleichungen“ (14) mit einer Lösung der „ungestörten Gleichungen“ (5) entsprechend der Operation zu Anfang des Abschn. 2 zwischen den inhomogenen Gleichungen und einer Lösung der homogenen Gleichungen, so erhalten wir den Ausdruck

$$\frac{d}{d\bar{\zeta}}(p_2^l \varkappa_2 - q_2^l \pi_2 + p_3^l \varkappa_3 - q_2^l \pi_3) = p_2^l \frac{\partial\Omega}{\partial\pi_2} + q_2^l \frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa_2} + p_3^l \frac{\partial\Omega}{\partial\pi_3} + q_3^l \frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa_3} .$$

Setzen wir hier den Ansatz (12) ein und berücksichtigen, daß

$$p_\sigma^l = \frac{\partial \pi_\sigma}{\partial c_l} \quad \text{und} \quad q_\sigma^l = \frac{\partial \varkappa_\sigma}{\partial c_l} \qquad (\sigma = 2, 3)$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{d}{d\bar{\xi}} \sum_{m=1}^{4} c_m(\bar{\xi}) \,(p_2^l\, q_2^m - p_2^m\, q_2^l + p_3^l\, q_3^m - p_3^m\, q_3^l) = \frac{\partial \Omega}{\partial c_l} \qquad (l = 1, 2, 3, 4)\,.$$

Da der Faktor von $c_m(\bar{\xi})$ die bilineare Kovariante $[m, l]$ des Gleichungssystems (5) ist, deren Werte in (2, 6) angegeben sind, erhalten die Störungsgleichungen die kanonische Gestalt

$$\left.\begin{aligned} c_2' &= -\frac{\partial \Omega}{\partial c_1}\,, & c_1' &= \frac{\partial \Omega}{\partial c_2}\,, \\ c_4' &= -\frac{\partial \Omega}{\partial c_3}\,, & c_3' &= \frac{\partial \Omega}{\partial c_4}\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

In der Störungsfunktion Ω (13b) sind hierbei mit dem Ansatz (12) die π_2, π_3; $\varkappa_2, \varkappa_3$ durch die c auszudrücken.

Diese einfache Herleitung der Störungsgleichungen beruht auf der Tatsache, daß unsere kanonischen Systeme linear sind. Unsere Störungsgleichungen (15) sind ein Sonderfall der allgemeinen *Lagrange*schen Störungsgleichungen, der immer dann eintritt, wenn die gestörten Konstanten kanonisch konjugiert sind[1]. Daß unsere Konstanten c_l diese Eigenschaft besitzen, erkennt man unmittelbar daraus, daß sie nach (11) die Werte der Koordinaten und Impulse an der Stelle $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0$ bedeuten.

Natürlich kann man auch den Ansatz (12) als kanonische Transformation der Variabelen π und $\varkappa$ auf die neuen Variabelen c_l auffassen. Die Störungsgleichungen (15) unseres Problems lauten

$$c_2' = -\left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right) \sum_{l=1}^{4} c_l \,\{p_2^1\, q_2^l + q_2^1\, p_2^l + p_3^1\, q_3^l + q_3^1\, p_3^l\}\,,$$

$$c_4' = -\left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right) \sum_{l=1}^{4} c_l \,\{p_2^3\, q_2^l + q_2^3\, p_2^l + p_3^3\, q_3^l + q_3^3\, p_3^l\}\,,$$

$$c_1' = \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right) \sum_{l=1}^{4} c_l \,\{p_2^2\, q_2^l + q_2^2\, p_2^l + p_3^2\, q_3^l + q_3^2\, p_3^l\}\,,$$

$$c_3' = \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right) \sum_{l=1}^{4} c_l \,\{p_2^4\, q_2^l + q_2^4\, p_2^l + p_2^4\, q_3^l + q_3^4\, p_3^l\}\,.$$

Unter Ausnutzung von (7) und (2,6) lassen sich die Störungsgleichungen mit den Faktoren

$$\beta_1 = \quad p_2^1\, q_2^1 + p_3^1\, q_3^1\,, \tag{16a}$$

$$\beta_2 = \quad p_2^1\, q^2 + p_3^1\, q_3^2\,, \tag{16b}$$

$$\beta_3 = -\,p_2^1\, p_3^2 + p_3^1\, p_2^2\,, \tag{16c}$$

$$\beta_4 = \quad p_2^2\, q_2^2 + p_3^2\, q_3^2 \tag{16d}$$

vereinfachen und integriert in folgender Form darstellen[2]:

$$c_2 = -\,2\,\frac{\varrho^\nu}{\eta} \int \frac{\eta}{\varrho^\nu} \left\{\left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right) \quad (\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \beta_3 c_3)\right\} d\bar{\xi} + c_2(\bar{\xi}_0)\,, \tag{17a}$$

$$c_4 = -\,2\,\frac{\varrho^\nu}{\eta} \int \frac{\eta}{\varrho^\nu} \left\{\left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right) \quad (\beta_3 c_1 + \beta_4 c_3 + \beta_2 c_4)\right\} d\bar{\xi} + c_4(\bar{\xi}_0)\,, \tag{17b}$$

$$c_1 = \quad 2\,\frac{\eta}{\varrho^\nu} \int \frac{\varrho^\nu}{\eta} \left\{\left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right) \quad (\beta_2 c_1 + \beta_4 c_2 - \beta_3 c_4)\right\} d\bar{\xi} + c_1(\bar{\xi}_0)\,, \tag{17c}$$

$$c_3 = \quad 2\,\frac{\eta}{\varrho^\nu} \int \frac{\varrho^\nu}{\eta} \left\{\left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right) (-\beta_3 c_2 + \beta_2 c_3 + \beta_1 c_4)\right\} d\bar{\xi} + c_3(\bar{\xi}_0)\,. \tag{17d}$$

---

[1] *G. Prange*, Enzyclopädie, S. 592.

[2] Die Integrale sind von $\bar{\xi}_0$ bis $\bar{\xi}$ zu erstrecken.

Aus diesem Gleichungssystem ist nun ein Grundsystem von Lösungen der c_l^m ($l, m = 1, 2, 3, 4$) mit den Anfangswerten null und eins entsprechend der Matrix (2,5)

$$\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & c_4^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_4^2 \\ c_1^3 & c_2^1 & c_3^3 & c_4^3 \\ c_1^4 & c_2^4 & c_3^4 & c_4^4 \end{pmatrix}_{\bar{\zeta}=\bar{\zeta}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

zu berechnen. Diese Berechnung geschieht durch Iteration.

Als erste Näherung setzen wir in die rechten Seiten von (14) die c_l^m konstant eins bzw. null für alle $\bar{\zeta}$ entsprechend ihren Anfangswerten. Dies hat zur Folge, daß zwischen den gestörten Konstanten c_l^m in zweiter Näherung immer noch die folgenden Beziehungen bestehen:

$$c_1^1 = c_3^3\,,\ c_4^1 = c_2^3\,,\ \ c_3^1 = c_4^2 = c_1^3 = c_2^4 \equiv 0\,,$$
$$c_2^2 = c_4^4\,,\ c_3^2 = c_1^4\,.$$

Wir brauchen also bei dem ersten Iterationsschritt nicht sechzehn, sondern nur acht Integrale nach (17) auszuwerten, nämlich für die Berechnung von

$$c_1^1\,,\ c_2^1\,,\ c_4^1\,;\ c_1^2\,,\ c_2^2\,,\ c_3^2\,;\ c_4^3 \text{ und } c_3^4\,.$$

Bei den weiteren Iterationsschritten fallen solche Vereinfachungen dann weg.

Hat man das Lösungssystem der Störungskoeffizienten c_l^m entsprechend der geforderten Genauigkeit gefunden, so erhalten wir nach (12) ein Hauptsystem von Lösungen des homogenen kanonischen Gleichungssystems (1) mit den Anfangswerten (2,5) und den in (2,6) angegebenen Werten der zugehörigen bilinearen Kovarianten. Wir kennen also jetzt ein kanonisch konjugiertes Hauptsystem von Lösungen der homogenen Gleichungen und können die Partikularlösungen durch Variation der Konstanten nach Abschn. 2 berechnen.

4. Beispiele: Wellrohr und Rohrsicke. Die hier entwickelte Integrationsmethode soll nun an einem Beispiel veranschaulicht werden. Der Meridian eines Wellrohres sei gegeben durch

$$\varrho(\bar{\zeta}) = 1 + 0{,}1\,(1 - \cos 5\,\pi\,\bar{\zeta})\,.$$

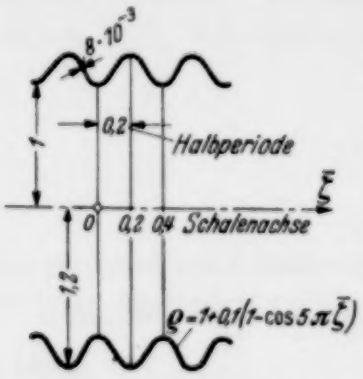

Abb. 3 Das Wellrohr.

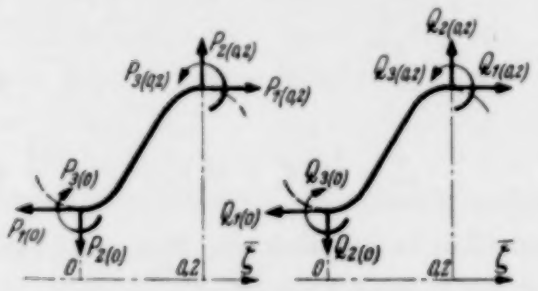

Abb. 4. Schnittreaktionen und Verschiebungen im Wellental und Wellenberg.

Die Wandstärke sei konstant ($\eta = 1$) und ihr Verhältnis zum kleinsten Rohrradius

$$\lambda = \frac{h_0}{r_0} = 4 \cdot 10^{-3}\,.$$

Das unendlich lang gedachte Rohr sei einer Zugbelastung in Richtung der Rohrachse ausgesetzt. Die Spannungen und Verschiebungen verlaufen dann periodisch mit der Rohrwellung. Die Rechnung braucht also nur für eine Halbperiode des Meridians durchgeführt zu werden (Abb. 3). Legen wir durch ein Wellental und den rechts davon benachbarten Wellenberg je einen Schnitt senkrecht zur Rohrachse, so ergibt sich eine Schalenzone, an deren Rändern die Schnittreaktionen und die Verschiebungen gegeben sind (Abb. 4)

$$P_2(0) = P_2(0{,}2) = Q_3(0) = Q_3(0{,}2) = 0\,.$$

Diese Randbedingungen an der betrachteten Schalenzone entsprechen einer beiderseitigen horizontalen Einspannung, wobei aber die Einspannstellen noch frei verschieblich sind in Richtung senkrecht und parallel zur Rohrachse. Die Schnittkraft senkrecht zur Rohrachse und die Verdrehung der Meridiantangente sind nach der in Abb. 3 festgelegten Wahl des Nullpunktes von $\bar{\zeta}$ ungerade Funktionen von $\bar{\zeta}$; das Biegemoment und die Verschiebung senkrecht zur Rohrachse ergeben gerade Funktionen von $\bar{\zeta}$. Das Hauptsystem von Lösungen des Gleichungssystems (3,1) ist nach Abschn. 3 berechnet worden und das Ergebnis in Abb. 5 graphisch dargestellt; dabei ist bemerkenswert, wie wenig sich die Lösungen für $\nu = 0$ von denen mit der Störungsrechnung für $\nu = 0{,}3$ verbesserten unterscheiden. Die Funktionen für die Koeffizienten der

Störungsrechnung c_l^m sind in Abb. 6 aufgetragen, und zwar sehen wir dort das Ergebnis nach dem ersten und zweiten Iterationsschritt. Die in dem Gleichungssystem (3.17) auftretenden Koeffizienten β_σ sind in Abb. 7 aufgezeichnet.

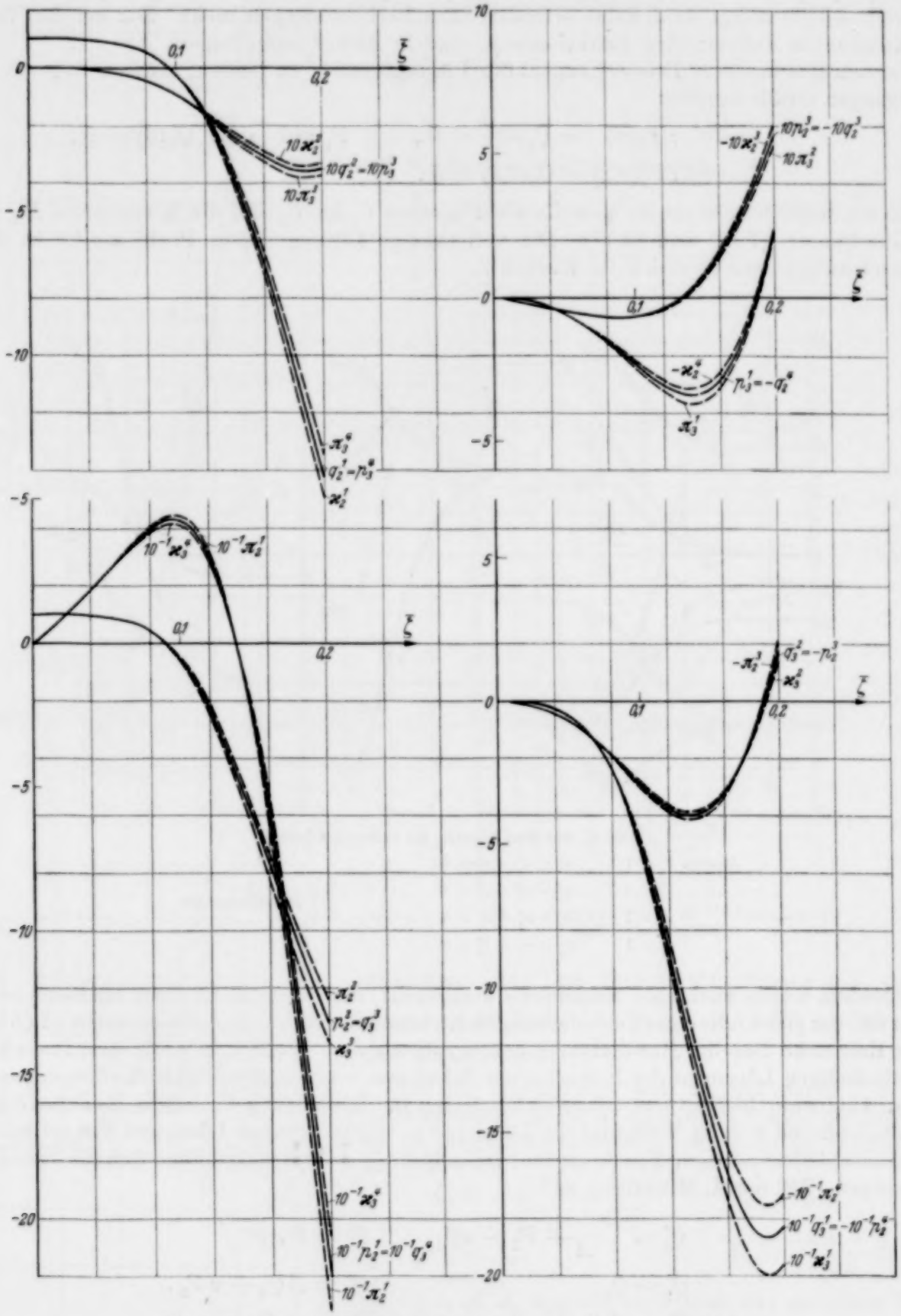

Abb. 5. Das kanonisch konjugierte Hauptsystem von Lösungen von (3, 1).
——— $\nu=0$, Lösungen des verkürzten Systems (3, 8). — — — $\nu=0{,}3$, durch Störungsrechnung verbesserte Lösungen.

Es empfiehlt sich, die nach (2), (7), (9) und (3) gefundenen Partikularlösungen durch eine Iteration nachzuprüfen bzw. zu verbessern. Infolge der unvermeidlichen Ungenauigkeiten bei der numerischen Berechnung der Lösungen des homogenen Systems können die bilinearen Kovari-

anten am Ende des Integrationsbereiches bisweilen beträchtlich von null bzw. eins abweichen. In Abb. 8 ist das Ergebnis der Partikularlösungen nach der Methode der Variation der Konstanten und das durch einen nachfolgenden Iterationsschritt aus dem inhomogenen Gleichungssystem (7,9) der I. Mitteilung mit $P_1 = 1$ und $K_1 = K_2 = 0$ verbesserte aufgetragen. Der nächste Iterationsschritt bringt dann keine erforderlichen Verbesserungen mehr. Die bei der Variation der Konstanten auftretenden Funktionen φ_σ sind in Abb. 9 aufgetragen.

Um nun das unserem Beispiel angepaßte Lösungssystem zu finden, müssen folgende Randbedingungen erfüllt werden:

$$\bar{\zeta} = 0 \;:\; P_2(0) = Q_3(0) = 0\,, \qquad P_1 = 1 \;\text{ und }\; Q_1(0) = 0\,,$$
$$\bar{\zeta} = 0{,}2 : P_2(0{,}2) = Q_3(0{,}2) = 0\,.$$

Aus diesen Bedingungen erhält man die Koeffizienten C_1 bis C_4 und die Konstanten P_{10} und Q_{10} der Gleichungen (2,10) und (2,11). Die vollständige Lösung dieses Problems ist in Abb. 11 graphisch aufgetragen (gestrichelte Kurven).

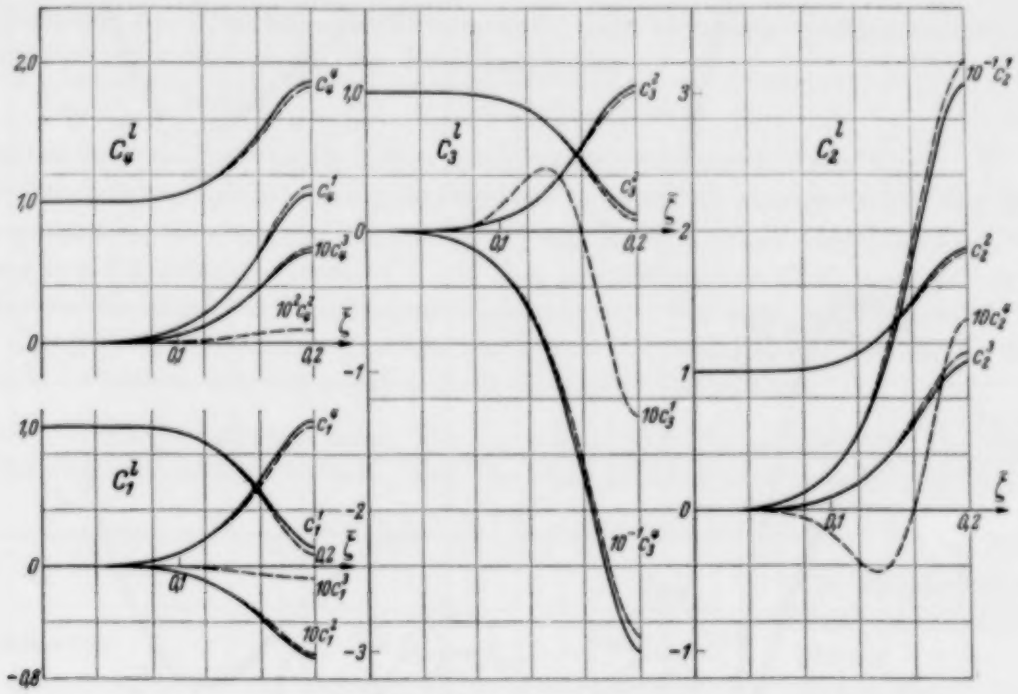

Abb. 6. Die Koeffizienten der Störungsrechnung

Ansatz: $c_1^1 = 1$ $\quad c_2^1 = c_3^1 = c_4^1 = 0$
$c_2^2 = 1$ $\quad c_1^2 = c_3^2 = c_4^2 = 0$ ..... 1. } Iterationsschritt
$c_3^3 = 1$ $\quad c_1^3 = c_2^3 = c_4^3 = 0$ ——— 2. }
$c_4^4 = 1$ $\quad c_1^4 = c_2^4 = c_3^4 = 0$

Außerdem wurde noch eine Einzelsicke untersucht, die in ein Rohr vom Radius $\varrho = 1$ eingebaut ist, das gleichfalls einer Zugbelastung in Richtung der Rohrachse unterworfen ist (Abb. 10). Da die Rohrsicke dieselbe Meridianform haben soll wie eine Welle des Wellrohrs, brauchen wir die vollständigen Lösungen der betrachteten Schalenzone nur anderen Randbedingungen anzupassen. Und zwar bleiben aus Symmetriegründen im Wellenberg dieselben Randbedingungen erhalten, während sich im Wellental die Lösungen an die bekannten Lösungen des zylindrischen Rohres anschließen müssen. Für das zylindrische Rohr ($\varrho' = 0$) vereinfachen sich die kanonischen Gleichungen (7,9) der I. Mitteilung zu[1]

$$Q_1' = \frac{(1-\nu^2)}{\Lambda} P_1 - \nu Q_2\,, \qquad P_1' = 0\,,$$
$$Q_2' = Q_3\,, \qquad P_2' = \Lambda Q_2 + \nu P_1\,,$$
$$Q_3' = \Lambda P_3\,, \qquad P_3' = -P_2\,.$$

Mit

$$\omega^4 = \Lambda^2/4$$

wird ein Grundsystem von Lösungen im Zylinder, ($\bar{\zeta} \leq 0$), da nur die nach links hin abklingenden

[1] Zur Bedeutung von Λ siehe (3,1).

in Frage kommen, gegeben durch

$$\pi_{2Z} = e^{\omega\bar{\zeta}}\left[A_1\cos\omega\bar{\zeta} + A_2\sin\omega\bar{\zeta}\right],$$

$$\varkappa_{2Z} = \frac{e^{\omega\bar{\zeta}}}{2\omega}\left[(A_1+A_2)\cos\omega\bar{\zeta} + (-A_1+A_2)\sin\omega\bar{\zeta}\right],$$

$$\pi_{3Z} = \frac{e^{\omega\bar{\zeta}}}{2\omega}\left[(-A_1+A_2)\cos\omega\bar{\zeta} - (A_1+A_2)\sin\omega\bar{\zeta}\right],$$

$$\varkappa_{3Z} = e^{\omega\bar{\zeta}}\left[A_2\cos\omega\bar{\zeta} - A_1\sin\omega\bar{\zeta}\right],$$

und die Partikularlösungen sind

$$P_{2p} = Q_{3p} = P_{3p} = 0, \qquad Q_{2p} = -\frac{\nu}{2\omega^2}P_1.$$

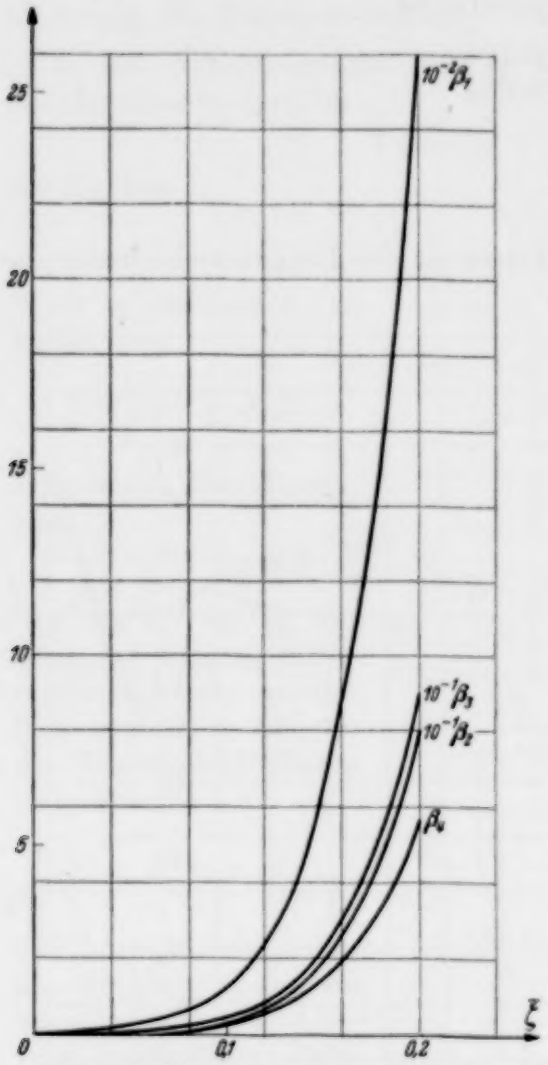

Abb. 7. Koeffizienten β nach Gleichung (3,16) für die Störungsrechnung.

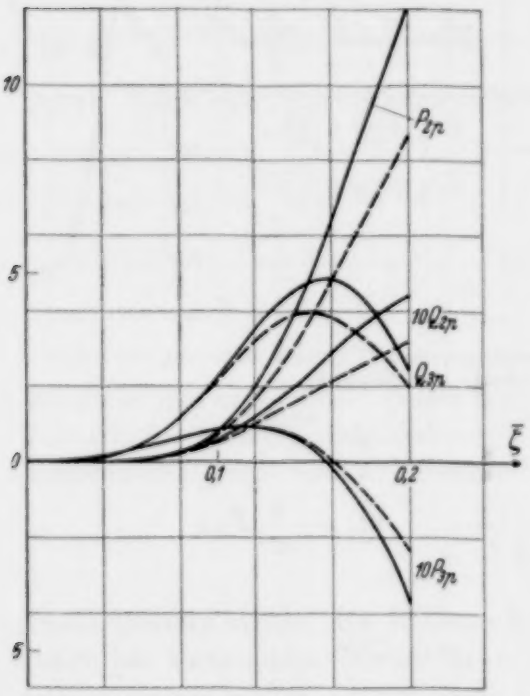

Abb. 8. Partikularlösung für eine parallel zur Schalenachse angreifende Zugkraft ($P_1 = 1$).
..... nach Variation der Konstanten,
——— nach einem Iterationsschritt.

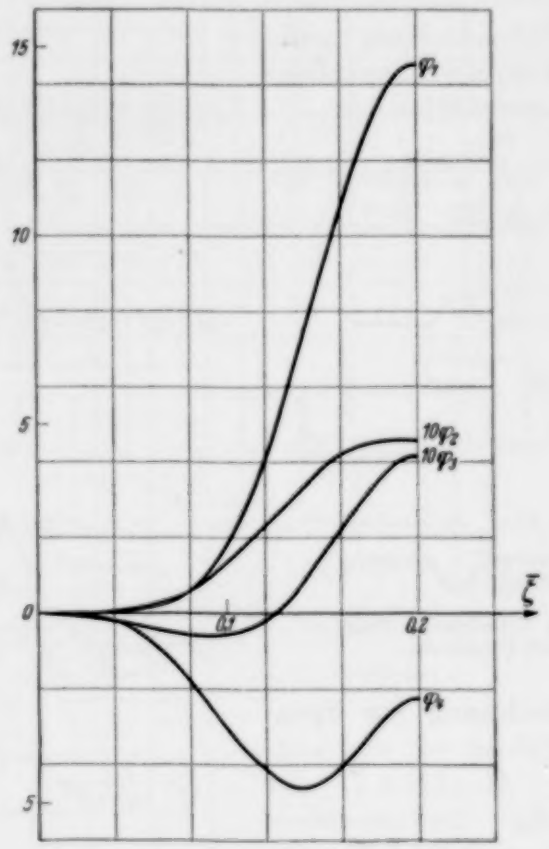

Abb. 9. Koeffizienten für die Partikularlösung nach Gleichung (2,3b).

Da hier $\omega = 14{,}37$ ist, sind die Funktionen π_{2Z}, π_{3Z} und $\varkappa_{2Z}$, $\varkappa_{3Z}$ an der Stelle $\bar{\zeta} = -\frac{2\pi}{\omega} = -0{,}437$ praktisch auf Null abgeklungen.

Aus der Bedingung, daß an der Stelle $\bar{\zeta} = 0$ die Zylinderlösung stetig in die bereits bekannten Lösungen für die Rohrsicke übergehen soll, folgt nach (2,10)

$$C_1 = \frac{A_1 + A_2}{2\omega} - \frac{\nu}{2\omega^2}, \qquad C_3 = A_2,$$

$$C_2 = A_1, \qquad C_4 = \frac{-A_1 + A_2}{2\omega}.$$

Die A_1 und A_2 ergeben sich dann aus derselben Randbedingung in der Mitte der Sicke wie beim Wellrohr:

$$\bar{\zeta} = 0{,}2: \; P_2(0{,}2) = Q_3(0{,}2) = 0.$$

Wie zu erwarten, sind die Abweichungen des Ergebnisses bei der Rohrsicke gegenüber dem Wellrohr am größten an der Stelle, wo das Rohr in die Rohrsicke einmündet, während im Wellenberg in beiden Fällen fast Übereinstimmung herrscht (Abb. 11).

Die Verschiebung in Richtung der Rohrachse erhält man nach (2,11a) durch eine Quadratur. Die Längsverschiebung des Wellenberges relativ zum Wellental ist

beim Wellrohr $Q_1 = 0{,}104$,
bei der Einzelsicke $Q_1 = 0{,}084$

mit

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \frac{v}{r_0}.$$

Für den Zylinder unter dem Einfluß von achsialen Zugkräften ist die Längsverschiebung proportional der Zylinderlänge

$$Q_1 = \frac{P_1}{A}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) = 2{,}425 \cdot 10^{-3}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0),$$

und die Verschiebung senkrecht zur Zylinderachse infolge der Querkontraktion ist

$$Q_2 = -\frac{P_1}{A} \cdot \nu = -0{,}727 \cdot 10^{-3}.$$

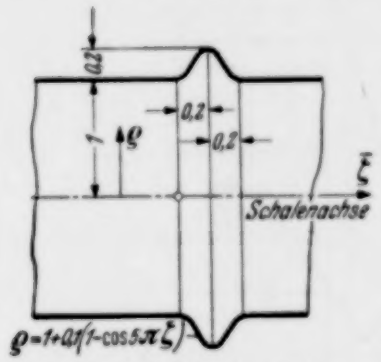

Abb. 10. Zylindrisches Rohr mit Einzelsicke.

5. Berechnung der Spannungen. Führen wir nun entsprechend Abschnitt 7 der I. Mitteilung dimensionslose Längskräfte und Momente ein, indem wir setzen

$$n_\varphi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\lambda} \frac{N_\varphi}{2\pi E h_0},$$

$$n_\vartheta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\lambda} \frac{N_\vartheta}{2\pi E h_0},$$

$$m_\varphi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\lambda} \frac{M_\varphi}{2\pi E h_0},$$

so ist

$$n_\varphi = \frac{P_1 + \eta \varrho' P_2}{\varrho\sqrt{1+\varrho'^2}}, \qquad n_\vartheta = A\frac{Q_2}{\varrho} + \nu \frac{P_1}{\varrho\sqrt{1+\varrho'^2}}, \qquad m_\varphi = \frac{\eta}{\varrho} P_3.$$

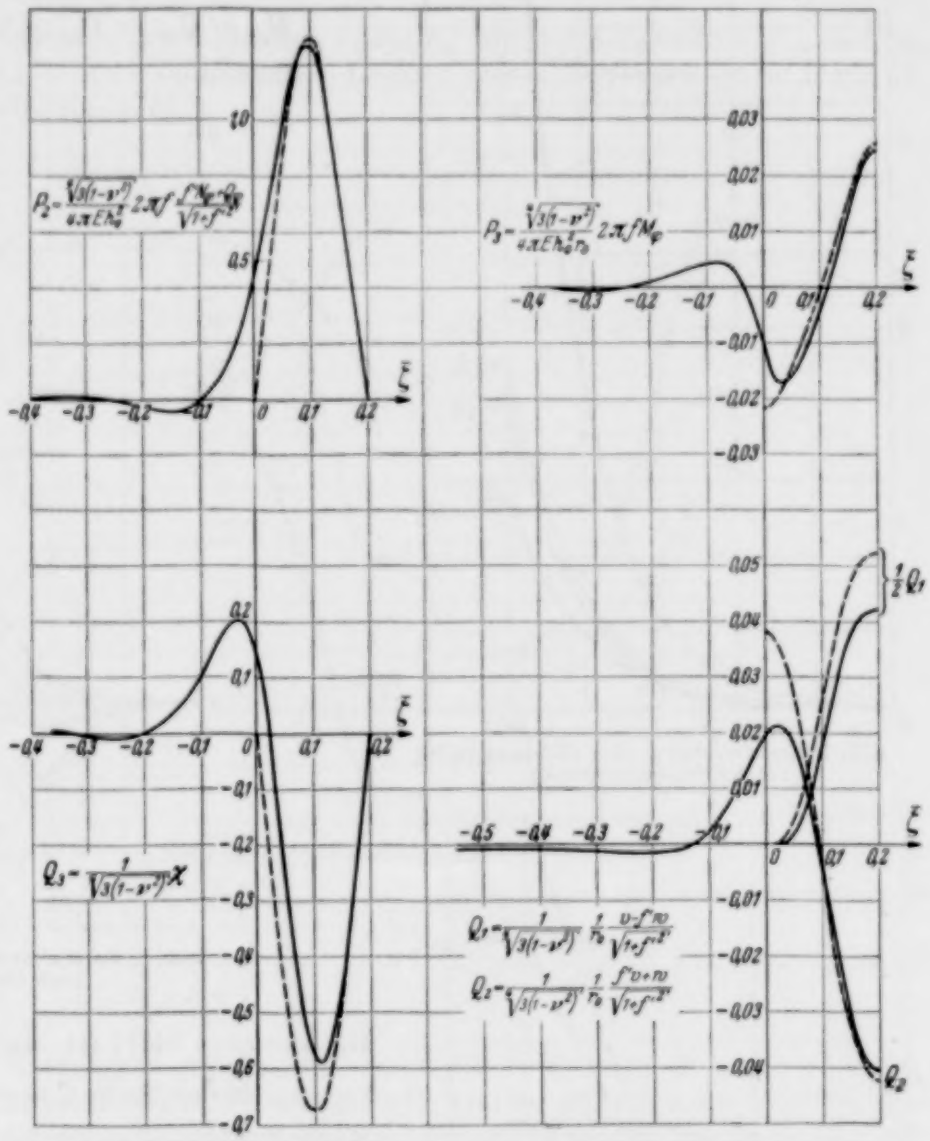

Abb. 11. Lösung des kanonischen Gleichungssystems (7,9) der I. Mitteilung für achsial gezogenes Wellrohr und Rohrsicke.

——— Rohrsicke, ---------- Wellrohr.

Die dimensionslosen Spannungen seien

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\lambda} \cdot \frac{\sigma}{2E}.$$

Dann erhalten wir nach (2,7) und (2,8) der I. Mitteilung die Ring- und Längsspannungen

$$\sigma_{\vartheta \pm h} = \frac{1}{2\eta}\left(n_\vartheta \mp \frac{3\nu}{\lambda} m_\varphi\right), \qquad \sigma_{\varphi \pm h} = \frac{1}{2\eta}\left(n_\varphi \mp \frac{3}{\lambda} m_\varphi\right).$$

Das Ergebnis ist in Abb. 12 für Wellrohr und Rohrsicke aufgetragen.

Man erkennt, daß bei den Längsspannungen in Richtung der Meridiantangente die Biegespannungen etwa sechzehnmal so groß sind wie die reine Zugspannung, während bei der Ringspannung die Zugspannung drei- bis viermal größer ist als die Biegespannung.

6. Das Näherungsverfahren von Geckeler. Die kanonischen Gleichungen (3,8) erhalten in den komplexen Größen

$$2\,\mathfrak{q} = (\varkappa_2 + i\,\pi_3) \quad \text{und} \quad \mathfrak{p} = (\pi_2 + i\,\varkappa_3)$$

die Gestalt

$$\mathfrak{q}' = -\,i\,\frac{\mathfrak{p}}{2}\,, \qquad \mathfrak{p}' = \Lambda\,\frac{\alpha}{\eta}\,2\,\mathfrak{q}\,.$$

Wird $\mathfrak{q}$ eliminiert, so ergibt sich

$$\left(\frac{\eta}{\alpha}\,\mathfrak{p}'\right)' = -\,i\Lambda\mathfrak{p}\,.$$

Durch die Transformation

$$\mathfrak{p} = \sqrt{\frac{\alpha}{\eta}}\;e^{\sqrt{\Lambda}\int Z\,d\bar{\zeta}}$$

geht die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\mathfrak{p}$ über in die *Riccati*sche Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\,Z' + Z^2 = -\,i\,\frac{\alpha}{\eta}\,.$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung machen wir eine Reihenentwicklung nach dem Parameter $1/\sqrt{\Lambda} \ll 1$:

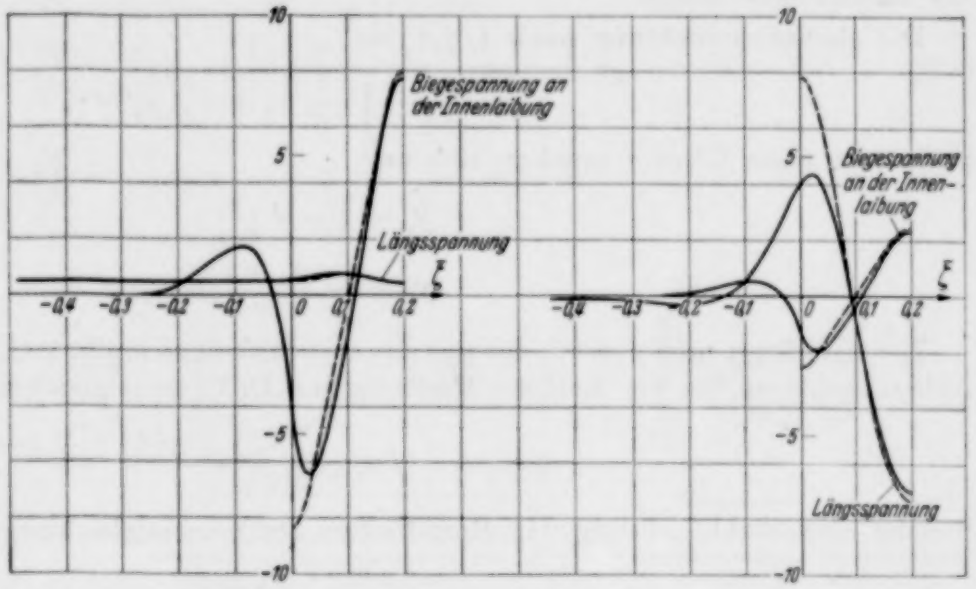

Abb. 12. Normalspannungen $\bar{\sigma}_\varphi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2\,E\,\lambda}\,\sigma_\varphi$ am Breitenkreis. Abb. links.
——— Rohrsicke, ····· Wellrohr.
Normalspannungen $\bar{\sigma}_\phi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2\,E\,\lambda}\,\sigma_\phi$ am Meridianschnitt. Abb. rechts.
——— Rohrsicke, ····· Wellrohr.

$$Z = Z_0 + \sqrt{\frac{1}{\Lambda}}\,Z_1 + \frac{1}{\Lambda}\,Z_2 + \left(\frac{1}{\Lambda}\right)^{3/2} Z_3 + \cdots\,.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$Z_0 = \sqrt{-\,i\,\frac{\alpha}{\eta}}\,,$$

$$Z_1 = -\,\frac{1}{2}\,\frac{d}{d\bar{\zeta}}\,(\ln Z_0)\,,$$

$$Z_2 = -\,\frac{1}{2}\left[\frac{d}{d\bar{\zeta}}\left(\frac{Z_1}{Z_0}\right) - \frac{Z_1^2}{Z_0}\right].$$

Wird nur das erste Glied dieser Reihenentwicklung berücksichtigt, so ergibt sich für die komplexe *Riccati*sche Differentialgleichung eine Lösung, die der *Geckeler*schen Näherungslösung[1] für die *Reißner-Meißner*schen Schalengleichungen entspricht:

$$\mathfrak{p} = \pi_2 + i\,\varkappa_3 = \sqrt{\frac{\alpha}{\eta}}\;e^{\sqrt{-i\Lambda}\int\sqrt{\frac{\alpha}{\eta}}\,d\bar{\zeta}}\,.$$

Diese Lösung erfüllt die *Riccati*sche Differentialgleichung exakt, wenn Z_0 konstant ist, und dies führt bei konstanter Wandstärke auf

$$\varrho = C\,[\mathfrak{Cof}\,\bar{\zeta} - \mathfrak{Cof}\,\bar{\zeta}_0]\,,$$

d. h. der Meridian bildet eine Kettenlinie und die Schale ist die Rotationsschale kleinsten Flächeninhaltes.

[1] *J. Geckeler*, Forschg. Ing.-Wesen. 1926, Heft 276.

Führen wir wieder den Neigungswinkel φ der Meridiantangente gegen die Schalenachse ein, so erhält man mit der Transformation

$$\mathfrak{y} = \sqrt{\frac{\varrho_1}{\eta\,\varrho}}\, e^{\sqrt{\Lambda}\int y\,d\varphi}$$

eine *Riccati*sche Differentialgleichung der Gestalt

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\,\dot{y} + y^2 = -\,i\,\frac{\varrho_1^2}{\eta\,\varrho_2}\,.$$

Der Punkt bedeutet: Differentiation nach φ; ferner ist ϱ_1 der dimensionslose Krümmungshalbmesser des Meridians und $\varrho_2 = \varrho\sqrt{1+\varrho'^2}$ der dimensionslose zweite Hauptkrümmungshalbmesser der Schalenmittelfläche.

Die Reihenentwicklung nach $1/\sqrt{\Lambda}$ ist

$$y = y_0 + \sqrt{\frac{1}{\Lambda}}\,y_1 + \frac{1}{\Lambda}\,y_2 \cdots,$$

und deren erste Glieder ergeben sich zu

$$y_0 = \sqrt{-\,i\,\frac{\varrho_1}{\eta\,\varrho_2}}\,,$$

$$y_1 = -\,\frac{1}{2}\,\frac{d}{d\varphi}\,(\ln y_0)\,.$$

Berücksichtigt man nun wieder nur das erste Glied, so ergibt sich die von *Geckeler* angegebene Näherungslösung für die *Reißner-Meißner*schen Differentialgleichungen

$$\mathfrak{y} = \varkappa_2 + i\,\varkappa_3 = \sqrt{\frac{\varrho_1}{\eta\,\varrho}}\, e^{\sqrt{-\,i\,\Lambda}\int \frac{\varrho_1}{\sqrt{\eta\,\varrho_2}}\,d\varphi}\,.$$

Dies ist eine exakte Lösung der *Riccati*schen Differentialgleichung, falls

$$\frac{\varrho_1}{\sqrt{\eta\,\varrho_2}} = \text{konst.}$$

ist, also z. B. bei konstanter Schalendicke für die Kugelschale.

In der *Geckeler*schen Näherungslösung steckt demnach genau dieselbe Vernachlässigung, die wir in Abschn. 3 getroffen haben; solange die Neigung der Meridiantangente zur Schalenachse nicht allzu steil wird, können die mit h_0/r_0 multiplizierten Glieder gegen die ohne diesen Faktor und die mit r_0/h_0 multiplizierten vernachlässigt werden. Außerdem wird die relative Änderung der Schalendicke η'/η null gesetzt und bis auf den Faktor $\sqrt{1-\nu^2}$ in Λ mit der Querkontraktion $\nu = 0$ gerechnet.

Weiterhin werden in der *Geckeler*schen Näherungslösung in der Reihenentwicklung nach $1/\sqrt{\Lambda}$ alle Glieder gegenüber dem ersten vernachlässigt. Über die Konvergenz dieser Reihenentwicklung läßt sich allgemein aber praktisch keine Aussage machen, so daß die Zulässigkeit dieser Vernachlässigungen von Fall zu Fall geprüft werden muß.

7. Ein Integrationsverfahren für flache Schalen. Für flache Schalen ist es zweckmäßig, die Meridiankurve durch

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}\,(\varrho)$$

darzustellen. Die dimensionslosen Impulse P_σ und Koordinaten Q_σ (Abb. 13) ($\sigma = 1, 2, 3$) sind jetzt als Funktionen des Breitenkreishalbmessers ϱ anzusehen. Die *Hamilton*sche Funktion $\overline{H}_{(\varrho)}$ in Abhängigkeit von der unabhängigen Variabelen ϱ erhalten wir aus (7,8) der I. Mitteilung durch die einfache kanonische Transformation

$$\overline{H}_{(\varrho)} = \overline{H}\,\frac{d\,\bar{\zeta}}{d\,\varrho}$$

in der folgenden Gestalt (wobei Striche Ableitungen nach ϱ bedeuten):

$$\left.\begin{aligned}
\overline{H}_{(\varrho)} = {} & \left(\bar{\zeta}'\,P_2 - \frac{P_1}{\eta}\right) Q_3 \\
& + \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3\,(1-\nu^2)}}{\lambda}\,\frac{\sqrt{1+\bar{\zeta}'^2}}{\eta\,\varrho}\,(P_3^2 - Q_3^2) + \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}\,\frac{\lambda\,\eta}{\varrho\sqrt{1+\bar{\zeta}'^2}}\left[\left(\frac{\bar{\zeta}'}{\eta}\,P_1 + P_2\right)^2 - Q_3^2\right]\right\} \\
& + \left(\frac{\eta'}{\eta} - \frac{\nu}{\varrho}\right)(P_2\,Q_2 + P_3\,Q_3) - \frac{\nu\,\bar{\zeta}'}{\eta\,\varrho}\,P_1 Q_2 + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[4]{3\,(1-\nu^2)}}{E\,\lambda^2}\,\varrho\sqrt{1+\bar{\zeta}'^2}\left(K_1\,Q_1 + K_2\,\frac{Q_2}{\eta}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Die in Abschn. 2 dargestellte allgemeine Integrationstheorie ist auch für die mit $\bar{H}_{(\varrho)}$ gebildeten kanonischen Gleichungen ohne Einschränkung gültig. Jedoch bietet sich hier für die Auffindung eines Hauptsystems von Lösungen der homogenen Gleichungen ein anderes Verfahren an als das in Abschn. 3 durchgeführte.

Die homogenen kanonischen Gleichungen ($P_1 = 0$ und $K_1 = K_2 = 0$) lauten mit $\Lambda = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\lambda}$

$$\pi_2' + \left(\frac{\eta'}{\eta} - \frac{\nu}{\varrho}\right)\pi_2 = \Lambda \frac{\sqrt{1+\bar{\zeta}'^2}}{\eta\varrho}\varkappa_2\,, \tag{2a}$$

$$\varkappa_2' - \left(\frac{\eta'}{\eta} - \frac{\nu}{\varrho}\right)\varkappa_2 = \frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\eta}{\varrho\sqrt{1+\bar{\zeta}'^2}}\pi_2 + \bar{\zeta}'\varkappa_3\,, \tag{2b}$$

$$\pi_3' + \left(\frac{\eta'}{\eta} - \frac{\nu}{\varrho}\right)\pi_3 = \frac{1-\nu^2}{\Lambda}\frac{\eta}{\varrho\sqrt{1+\bar{\zeta}'^2}}\varkappa_3 - \bar{\zeta}'\pi_2\,, \tag{3a}$$

$$\varkappa_3' - \left(\frac{\eta'}{\eta} - \frac{\nu}{\varrho}\right)\varkappa_3 = \Lambda \frac{\sqrt{1+\bar{\zeta}'^2}}{\eta\varrho}\pi_3\,. \tag{3b}$$

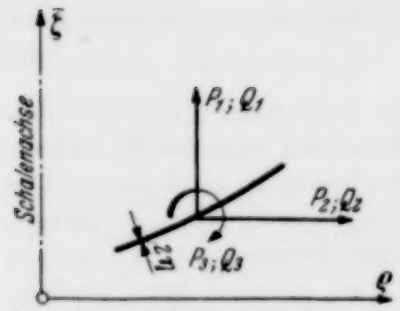

Abb. 13. „Impulse" und „Koordinaten" für die flache Schale.

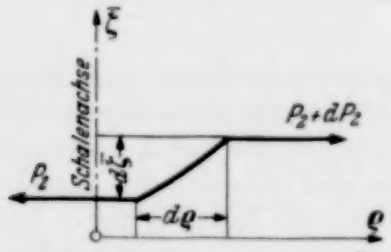

Abb. 14. Die Schnittkraftkomponenten senkrecht zur Schalenachse an den Rändern eines Ringelementes.

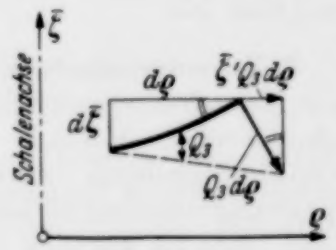

Abb. 15. Verschiebung eines Schalenpunktes, falls das Schalenelement nur verdreht wird.

Streichen wir zunächst in (2b) das Glied $\bar{\zeta}'\varkappa_3$ und in (3a) das Glied $\bar{\zeta}'\pi_2$, so zerfällt unser Gleichungssystem in zwei voneinander unabhängige Systeme für $\pi_2, \varkappa_2$ einerseits und $\pi_3, \varkappa_3$ andererseits. Die zugehörige *Hamilton*sche Funktion erhält man, wenn in (1) außer den Belastungsgliedern noch der erste Klammerausdruck weggestrichen wird. Wir wollen die Lösungen der so entstandenen getrennten Gleichungssysteme, die offenbar je für sich kanonische Gestalt haben, mit p_2, q_2 bzw. p_3, q_3 bezeichnen. Die vier Lösungen beider Gleichungssysteme bilden die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} q_2^1 & p_2^1 & 0 & 0 \\ q_2^2 & p_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3^3 & p_3^3 \\ 0 & 0 & q_3^4 & p_3^4 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Hat man ein kanonisch konjugiertes Hauptsystem von Lösungen gefunden[1], so werden diese durch eine Störungsrechnung mit der Störungsfunktion $\Omega = \bar{\zeta}'\pi_2\varkappa_3$ verbessert, und zwar macht man den Ansatz

$$\pi_2 = c_1 p_2^1 + c_2 p_2^2\,, \tag{6a}$$

$$\varkappa_3 = c_3 q_3^3 + c_4 q_3^4 \tag{6b}$$

und erhält für die gestörten Koeffizienten c_l $(l = 1, 2, 3, 4)$ die *Lagrange*schen Störungsgleichungen in kanonischer Gestalt

$$c_1' = \bar{\zeta}' p_2^2 (c_3 q_3^3 + c_4 q_3^4)\,, \tag{7a}$$

$$c_2' = -\bar{\zeta}' p_2^1 (c_3 q_3^3 + c_4 q_3^4)\,, \tag{7b}$$

$$c_3' = \bar{\zeta}' q_3^4 (c_1 p_2^1 + c_2 p_2^2)\,, \tag{7c}$$

$$c_4' = -\bar{\zeta}' q_3^3 (c_1 p_2^1 + c_2 p_2^2)\,. \tag{7d}$$

Das hier angegebene Integrationsverfahren ist nur möglich für $\varrho \neq 0$. Die geschlossene Schale

[1] Man wird Gl. (2) und (3) entsprechend (3,1*) umformen und schrittweise numerisch integrieren.

muß in der Umgebung $\varrho = 0$ durch eine Platte oder eine Kugelkalotte ersetzt werden, für die exakte Lösungen bekannt sind[1].

Besonders einfach wird dieses Integrationsverfahren, wenn die Schale so flach ist, daß $\bar{\zeta}'^2$ gegen 1 vernachlässigt werden kann. Wir erhalten dann mit $\bar{\zeta}' = 0$ aus dem Gleichungssystem (2) die Scheibengleichungen und aus dem Gleichungssystem (3) die Gleichungen der Plattenbiegung, die für konstante Schalendicke geschlossen integriert werden können. Man muß allerdings dafür sorgen, daß man für die Scheibengleichungen und die Plattengleichungen ein kanonisch konjugiertes System von Grundlösungen erhält, deren bilineare Kovarianten also immer null oder eins sind.

Im Fall $\bar{\zeta}'^2 \ll 1$ können wir die vernachlässigten Glieder $\bar{\zeta}' \pi_2$ und $\bar{\zeta}' \varkappa_3$ wie folgt deuten. Gleichung (3a) stellt die Momentengleichgewichtsbedingung dar, in der das Glied $\bar{\zeta}' \pi_2$ herrührt von dem Moment des Kräftepaares, das die an einem Schalenelement angreifenden Schnittkraftkomponenten senkrecht zur Schalenachse bilden (Abb. 14). Bei flachen Schalen ist aber der Hebelarm dieses Kräftepaares so klein, so daß wir das entstehende Moment zunächst vernachlässigen können.

Die Vernachlässigung in (2b) besagt, daß die durch die Verdrehung der Meridiantangente Q_3 hervorgerufene Verschiebung senkrecht zur Schalenachse in erster Näherung vernachlässigbar ist (Abb. 15).

8. Zusammenfassung. Das Variationsproblem vom Minimum der potentiellen Energie, das wir für achsensymmetrische Schalen unter achsensymmetrischer Belastung aufgestellt haben, können wir nach den in der analytischen Mechanik gebräuchlichen Methoden in ein kanonisches Variationsproblem transformieren und hieraus die kanonischen Gleichungen für den Biegespannungszustand herleiten. Da man ein Integral dieses Differentialgleichungssystems angeben kann — es ist nämlich die Komponente der resultierenden Schnittkraft parallel zur Schalenachse das Integral der Belastungskomponente in dieser Richtung —, können wir eine zyklische Koordinate einführen und das ursprüngliche kanonische Gleichungssystem von sechs linearen Differentialgleichungen erster Ordnung auf eins mit nur vier Differentialgleichungen transformieren.

In den Koeffizienten dieser Differentialgleichungen tauchen nur die ersten Ableitungen der Baugrößen — Schalendicke und Meridian der Schale — auf. Zur Integration machen wir uns die Vorteile zunutze, die sich aus der Theorie linearer kanonischer Differentialgleichungssysteme erster Ordnung ergeben. Für Schalen, deren Meridianneigung gegen die Schalenachse nicht allzu steil ist, können wir eine die Integration sehr vereinfachende Verkürzung des Gleichungssystems treffen. Setzen wir außerdem zunächst die Querkontraktionsziffer und die relative Änderung der Schalendicke gleich null, so ergibt sich eine wohl in den meisten Fällen schon recht brauchbare Näherungslösung, die sehr einfach zu ermitteln ist, da man zur Kenntnis eines Hauptsystems von vier Lösungen der homogenen Gleichungen nur deren zwei zu berechnen braucht. Die durch die letzte Vernachlässigung gestrichenen Glieder können dann durch eine Störungsrechnung für eine Verbesserung dieser ersten Näherungslösung wieder berücksichtigt werden.

Ein entsprechendes Integrationsverfahren ist im letzten Abschnitt für die flache Schale angegeben worden. Durch die Streichung von zwei Gliedern zerfällt das ursprüngliche Gleichungssystem in zwei unabhängige, kanonische Systeme von je 2 Gleichungen. Mit den weggestrichenen Gliedern, die die beiden Systeme koppeln, wird eine Störungsrechnung durchgeführt, die die zunächst erhaltenen Lösungen verbessert.

Die Partikularlösungen für den jeweiligen Belastungszustand der Schale lassen sich aus dem kanonisch konjugierten System von Grundlösungen sehr einfach nach der Methode der Variation der Konstanten berechnen.

(Eingegangen am 18. Dezember 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Hildegard Münz*, Rheinhausen, Am Damm 6.

[1] Vgl. *J. Geckeler*, Ing.-Arch. 1 (1930), S. 255.

Stoffgesetze und Wellen zähelastischer, isotroper Medien.

Von E. Pieruschka.

I. Mathematische Hilfsmittel.

1. Bezeichnungen. Die rechtwinkligen Koordinatenachsen des Raumes werden mit x_1, x_2 und x_3 und ihre Einheitsvektoren mit $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$ bezeichnet. Kleine griechische Buchstaben als Indizes sollen andeuten, daß jeder für die drei Zahlen 1, 2 und 3 gelten soll. Es bedeutet also x_α so viel wie x_1, x_2 und x_3. Skalare sollen mit großen und kleinen lateinischen Buchstaben, Vektoren mit kleinen deutschen und Tensoren zweiter Stufe mit großen deutschen Buchstaben bezeichnet werden. Die Koordinaten der Tensoren sollen mit den entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben gekennzeichnet werden, die mit der notwendigen Anzahl von Indizes zu versehen sind.

Soll von eins bis drei summiert werden, so werden kleine lateinische Buchstaben als Indizes verwendet. Es steht z. B.

$$\mathfrak{A} = a_{ab}\,\mathfrak{e}_a\,\mathfrak{e}_b \quad \text{für} \quad \sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3} a_{ab}\,\mathfrak{e}_a\,\mathfrak{e}_b .$$

Die skalare Multiplikation wird durch einen Punkt zwischen den beiden Tensoren angedeutet. Das Vektorprodukt schreiben wir mit eckigen Klammern. Beim Vektorprodukt zwischen einem Vektor und einem Tensor zweiter Stufe soll der Vektor zuerst vektoriell mit dem benachbarten und dann auch mit dem nicht benachbarten Einheitsvektor des Tensors zweiter Stufe nach

$$[\mathfrak{e}_\alpha;\,\mathfrak{e}_\alpha] = 0, \quad [\mathfrak{e}_\alpha;\,\mathfrak{e}_{(\alpha+1)}] = \mathfrak{e}_{(\alpha+2)} \quad \text{und} \quad [\mathfrak{e}_\alpha;\,\mathfrak{e}_\beta] = -\,[\mathfrak{e}_\beta;\,\mathfrak{e}_\alpha]$$

multipliziert werden. Dann ist die Summe zu bilden. Bei dieser Definition gilt auch hier die bekannte Regel bei Vertauschen der Faktoren eines Vektorprodukts

$$[\mathfrak{B};\,\mathfrak{a}] = -\,[\mathfrak{a};\,\mathfrak{B}]. \tag{1.1}$$

Das vektorielle Produkt zwischen einem Vektor und Tensor zerlege man nach

$$[\mathfrak{B};\,\mathfrak{a}] = a_1\,[\mathfrak{B};\,\mathfrak{e}_1] + a_2\,[\mathfrak{B};\,\mathfrak{e}_2] + a_3\,[\mathfrak{B};\,\mathfrak{e}_3]. \tag{1.2}$$

Die Tensorengrößen $[\mathfrak{B};\,\mathfrak{e}_\alpha]$ berechnen sich leicht nach

$$[\mathfrak{B};\,\mathfrak{e}_\alpha] = b_{ab}\,\mathfrak{e}_a\,[\mathfrak{e}_b;\,\mathfrak{e}_\alpha] + b_{ab}\,[\mathfrak{e}_a;\,\mathfrak{e}_\alpha]\,\mathfrak{e}_b .$$

Bei Symmetrie von $\mathfrak{B}$ erhält man so leicht die drei Deviatoren

$$\left.\begin{aligned}
[\mathfrak{B};\,\mathfrak{e}_1] = {} & 0 && \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_1 + && b_{13} && \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2 - && b_{12} && \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_3 \\
& + b_{13} && \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_1 + && 2\,b_{23} && \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_2 + && (b_{33} - b_{22}) && \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 \\
& - b_{21} && \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_1 + && (b_{33} - b_{22}) && \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_2 - && 2\,b_{23} && \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_3
\end{aligned}\right| \tag{1.2a}$$

$$\left.\begin{aligned}
[\mathfrak{B};\,\mathfrak{e}_2] = {} & -2\,b_{13} && \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_1 - && b_{23} && \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2 + && (b_{11} - b_{33}) && \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_3 \\
& - b_{23} && \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_1 + && 0 && \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_2 + && b_{21} && \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 \\
& + (b_{11} - b_{33}) && \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_1 + && b_{12} && \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_2 + && 2\,b_{13} && \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_3
\end{aligned}\right| \tag{1.2b}$$

$$\left.\begin{aligned}
[\mathfrak{B};\,\mathfrak{e}_3] = {} & +2\,b_{12} && \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_1 + && (b_{22} - b_{11}) && \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2 + && b_{23} && \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_3 \\
& + (b_{22} - b_{11}) && \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_1 - && 2\,b_{12} && \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_2 - && b_{13} && \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 \\
& + b_{23} && \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_1 - && b_{13} && \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_2 + && 0 && \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_3
\end{aligned}\right| \tag{1.2c}$$

2. Analyse des symmetrischen Tensors zweiter Stufe. Der Kugeleinheitstensor soll mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet werden:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{e}_a\,\mathfrak{e}_a . \tag{2.1}$$

Die invariante Größe der Mittelkomponente eines Tensors kann man schreiben

$$a = \frac{1}{3}\,a_{aa} . \tag{2.2}$$

Jeden Tensor kann man in den Kugeltensor und Deviator — Tensor, dessen Mittelkomponente Null ist — zerlegen. Der Deviator soll mit dem Index Null angedeutet werden:

$$\mathfrak{A} = a\,\mathfrak{F} + \mathfrak{A}_0. \tag{2.3}$$

Dividiert man einen Tensor durch seine Intensität, so erhält man nach Fromm[1] die Art des Tensors:

$$\mathfrak{A} = A\ \mathrm{Art}\,(\mathfrak{A}) \quad \text{mit} \quad A^2 = a_{ab}\,a_{ba}. \tag{2.4}$$

Damit kann man einen Tensor auch zerlegen:

$$\mathfrak{A} = 3\,a\ Art\,(\mathfrak{F}) + A_0\ Art\,(\mathfrak{A}_0). \tag{2.5}$$

Der Tensor zweiter Stufe läßt sich durch sechs invariante Größen angeben. Drei Größen sind durch die Angabe der drei Hauptachsen gegeben. Für die drei weiteren schlägt Fromm vor:

die Mittelkomponente nach (2.2),

die Intensität des Deviators

$$A_0^2 = A^2 + 3a^2 \tag{2.6}$$

und die Form definiert durch

$$\alpha_0 = \frac{|a_{0\,a\,b}|}{A_0^3}\,. \tag{2.7}$$

Mit $|a_{0\,a\,k}|$ soll die Determinante des Koeffizientenschemas des Deviators $\mathfrak{A}_0$ bezeichnet werden. Die Bezeichnung Form wählte *Fromm*, weil Tensoren mit gleichem Wert für die Form bei der Darstellung nach *Mohr* ähnliche Kreisdreiecke ergeben. Er nennt daher auch Tensoren gleicher Form ähnlich.

3. Tensordifferentialoperatoren. Der Gradient eines Vektors ist ein Tensor zweiter Stufe:

$$\mathrm{grad}\,\mathfrak{a} = \frac{\partial a_a}{\partial x_b}\,\mathfrak{e}_b\,\mathfrak{e}_a\,. \tag{3.1a}$$

Der Gradient eines Tensors zweiter Stufe ist ein Tensor dritter Stufe:

$$\mathrm{grad}\,\mathfrak{A} = \frac{\partial a_{a\,b}}{\partial x_c}\,\mathfrak{e}_c\,\mathfrak{e}_a\,\mathfrak{e}_b\,. \tag{3.1b}$$

Bezeichnet man den Ortsvektor mit $\mathfrak{x}$, und ändert sich dieser um $d\mathfrak{x}$, so ändert sich der Tensor $\mathfrak{A}$ um

$$d\,\mathfrak{A} = d\,\mathfrak{x} \cdot \mathrm{grad}\,\mathfrak{A}\,. \tag{3.2}$$

Die Divergenz eines Tensors zweiter Stufe ist ein Vektor und kann definiert werden als

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{A} = \frac{\partial a_{a\,b}}{\partial x_a}\,\mathfrak{e}_b\,. \tag{3.3}$$

Der *Gaußsche Satz*, auf den Tensor zweiter Stufe erweitert, lautet

$$\int^{F} d\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{A} = \int^{V} dR\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}\,. \tag{3.4}$$

Den Rotor eines Vektors kann man auf zweifache Art definieren. Hier interessiert nur die antimetrische Darstellung. Sie soll mit Rot bezeichnet werden. Es ist

$$\mathrm{Rot}\,\mathfrak{v} = \frac{\partial v_a}{\partial x_b}\,(\mathfrak{e}_b\,\mathfrak{e}_a - \mathfrak{e}_a\,\mathfrak{e}_b)\,. \tag{3.5}$$

Der antimetrische Tensor Rot $\mathfrak{v}$ läßt sich auch als Vektor schreiben, indem man $(\mathfrak{e}_\alpha\,\mathfrak{e}_{(\alpha+1)} - \mathfrak{e}_{(\alpha+1)}\,\mathfrak{e}_\alpha)$ durch $\mathfrak{e}_{(\alpha+2)}$ ersetzt. Der Deformator eines Vektors läßt sich definieren:

$$\mathrm{def}\,\mathfrak{v} = \frac{\partial v_a}{\partial x_b}\,(\mathfrak{e}_b\,\mathfrak{e}_a + \mathfrak{e}_a\,\mathfrak{e}_b)\,. \tag{3.6}$$

Es besteht also die Beziehung:

$$\mathrm{grad}\,\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\,\mathrm{def}\,\mathfrak{v} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Rot}\,\mathfrak{v}\,. \tag{3.7}$$

---

[1] *H. Fromm*, Ing.-Arch. 4 (1933), S. 432.

Nun sollen noch einige Beziehungen angegeben werden, die leicht abgeleitet werden können und später gebraucht werden:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\mathfrak{A}) = \Delta\,\mathfrak{A} \quad (\Delta \text{ ist der } \textit{Laplace}\text{sche Operator}), \tag{3.8}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{def}\mathfrak{A}) = \Delta\,\mathfrak{A} + \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathfrak{A}), \tag{3.9}$$

$$\operatorname{div}(u\,\mathfrak{F}) = \operatorname{grad}(u), \tag{3.10}$$

4. Tensoren im bewegten Koordinatensystem. Das Bezugssystem bewege sich mit der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$. Ein Tensor $\mathfrak{A}$ sei im bewegten Koordinatensystem definiert. In der Zeit dt ändert sich der Tensor um $d\mathfrak{A}$. Diese Änderung kann in drei Teile zerlegt werden. Zuerst nimmt der Tensor infolge einer zeitlichen Änderung am Ort selbst um $(\partial\,\mathfrak{A}/\partial t)\,dt$ zu. Dann nimmt er weiter infolge der Änderung der Lage des Systems um $d\mathfrak{x}$ zu. Nach (3.2) ist dieser Betrag

$$d\mathfrak{x}\cdot\operatorname{grad}\mathfrak{A}\,.$$

Zur Berechnung des durch die Rotation entstandenen Anteils muß man beachten, daß sich infolge der Drehung auch die Einheitsvektoren ändern. Daher muß man diese nach der Zeit ableiten. Für den Tensor $\mathfrak{A}$ ist der durch die Drehung bedingte Anteil

$$a_{a\,b}\frac{d\mathfrak{e}_a}{dt}\,\mathfrak{e}_b + a_{a\,b}\,\mathfrak{e}_a\,\frac{d\mathfrak{e}_b}{dt}\,.$$

Die Änderung der Einheitsvektoren nach der Zeit läßt sich nach bekannter Art durch die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ und den Einheitsvektor selbst ausdrücken:

$$\frac{d\mathfrak{e}_\lambda}{dt} = [\mathfrak{e}_\lambda;\ \mathfrak{w}]\,.$$

Setzt man diesen Wert in obige Gleichung ein, so erhält man für den durch die Rotation bedingten Anteil der Änderung des Tensors $[\mathfrak{A};\mathfrak{w}]\,dt$. Letzterer Wert kann nach (1.2) berechnet werden. Mit diesen drei Anteilen erhält man schließlich

$$\frac{d\,\mathfrak{A}}{d\,t} = \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,t} + \mathfrak{v}\cdot\operatorname{grad}\mathfrak{A} + [\mathfrak{A};\mathfrak{w}]\,. \tag{4.1}$$

II. Stoffgesetze zähelastischer, isotroper Körper.

5. Die Tensoren. Der Spannungstensor soll bezeichnet werden als

$$\mathfrak{P} = p_{a\,b}\,\mathfrak{e}_a\,\mathfrak{e}_b. \tag{5.1}$$

Auf die Fläche $d\mathfrak{f}$ eines Körpers wirkt die Kraft

$$d\mathfrak{p} = d\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{P}. \tag{5.2}$$

Bezeichnet man die Dichte mit ϱ und die am Massengramm wirkende Volumenkraft mit $\mathfrak{g}$, so ist die Gleichgewichtsbedingung am Körper

$$\int^{F} d\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{P} + \int^{V}\varrho\mathfrak{g}\,dR - \int^{V}\varrho\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\,dR = 0$$

mit dR als Element von V. Verwandelt man das erste Oberflächenintegral mittels des Satzes von *Gauß* (3.4) in ein Volumenintegral, entwickelt das totale Differential $d\mathfrak{v}/dt$ in ein nur von der Zeit und ein nur vom Ort abhängiges Differential, bringt den ganzen Ausdruck unter ein Integralzeichen und beachtet, daß der Integrand Null werden muß, da die Gleichung für alle Volumina Gültigkeit haben muß, so erhält man die dynamische Grundgleichung

$$\frac{1}{\varrho}\operatorname{div}\mathfrak{P} + \mathfrak{g} = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + \mathfrak{v}\cdot\operatorname{grad}\mathfrak{v} \tag{5.3}$$

in Tensordarstellung. Da sie eine Vektorgleichung ist, gilt sie für drei skalare Gleichungen.

Die Geschwindigkeiten eines Punktes in der Nähe eines Stoffteilchens lassen sich erfassen durch die Geschwindigkeit des betrachteten Stoffteilchens und die Geschwindigkeitsänderung nach (3.2)

$$d\mathfrak{v} = d\mathfrak{x}\cdot\operatorname{grad}\mathfrak{v} \tag{5.4}$$

in der Entfernung $d\mathfrak{x}$ dieses Punktes. Die maßgebliche Größe für die Geschwindigkeitsänderung in unmittelbarer Nähe eines Punktes eines Stoffteilchens ist der Gradient der Geschwindigkeit. Dieser läßt sich noch nach (3.7) aufteilen. 1/2 Rot $\mathfrak{v}$ stellt den Drehgeschwindigkeitstensor des Stoffteilchens dar. Die Drehung eines Stoffteilchens ist für die Spannung selbst nicht von unmittelbarer Bedeutung. Daher ist der Deformator def $\mathfrak{v}$ die einzige interessierende Größe der Gestaltänderungsgeschwindigkeit. Nach (3.6) ist der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{def}\,\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial v_a}{\partial x_b}\,(\mathfrak{e}_a\mathfrak{e}_b + \mathfrak{e}_b\mathfrak{e}_a). \tag{5.5}$$

Der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor ist entscheidend für den Spannungstensor in strömenden Flüssigkeiten. Die Stoffgesetze strömender Medien werden daher Beziehungen zwischen diesen beiden Tensoren und eventuell auch ihren Ableitungen sein.

Die aus dem Geschwindigkeitsfeld entwickelte Deformation ist ursprünglicher als die aus dem Verschiebungsfeld entwickelte. Sie läßt sich stets definieren, während die aus dem Verschiebungsfeld nicht immer definierbar ist. Nur bei überwiegend elastischen Stoffen ist der Verzerrungstensor, der sich aus dem Verschiebungsfeld $\mathfrak{s}$ genau so wie der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor aus dem Geschwindigkeitsfeld ableiten läßt, klar definierbar.

Ist $\mathfrak{s}$ die Verschiebung, so ist der Verzerrungstensor

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{def}\,\mathfrak{s} = \frac{1}{2}\left(\frac{ds_a}{\partial x_b} + \frac{\partial s_b}{\partial x_a}\right)\mathfrak{e}_a\mathfrak{e}_b. \tag{5.6}$$

Vom besonderem Interesse ist der Zusammenhang zwischen Verzerrungstensor und Verzerrungsgeschwindigkeitstensor. Der Geschwindigkeits- und der Verschiebungsvektor sind nicht an derselben Stelle zu definieren. Man betrachte das Geschwindigkeitsfeld an der Stelle des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ und das Verschiebungsfeld an der Stelle des Ortsvektors $\mathfrak{x}_0$. Zwischen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_0$ und der Verschiebung $\mathfrak{s}$ besteht der Zusammenhang

$$\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{s} = \mathfrak{x}. \tag{5.7}$$

Nun ist

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{x}) = \frac{\partial\,\mathfrak{s}\,(\mathfrak{x}_0)}{\partial t}. \tag{5.8}$$

Da die Bildung des Deformators keine Ableitung nach der Zeit enthält, ist

$$\mathrm{def}\,\mathfrak{v}(\mathfrak{x}) = \frac{\partial\,\mathrm{def}\,\mathfrak{s}\,(\mathfrak{x}_0)}{\partial t}.$$

In Zukunft soll stillschweigend vorausgesetzt werden, daß $\mathfrak{v}$ an der Stelle $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{s}$ an der Stelle $\mathfrak{x}_0$ definiert sind. Dann kann man setzen

$$\mathrm{def}\,\mathfrak{v} = \frac{\partial\,\mathrm{def}\,\mathfrak{s}}{\partial t}. \tag{5.9}$$

Die weitere Analyse ergibt für (5.10a) die Mittelkomponente von $\mathrm{def}\,\mathfrak{s} = \frac{2}{3}\frac{\partial s_a}{\partial x_a} = \frac{2}{3}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{s}$ und für (5.10b) die Mittelkomponente von $\mathrm{def}\,\mathfrak{v} = \frac{2}{3}\frac{\partial v_a}{\partial x_a} = \frac{2}{3}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}$.

Es soll also in Zukunft die Mittelkomponente durch die entsprechende Divergenz ausgedrückt werden. Weiter soll der Deviator der Deformatoren mit dem Index Null bei def gekennzeichnet werden, also $\mathrm{def}_0\,\mathfrak{s}$ und $\mathrm{def}_0\,\mathfrak{v}$.

6. Grundannahmen zur Entwicklung der Stoffgesetze. Die Stoffgesetze werden Beziehungen zwischen den Tensoren der Spannung und Verformung sein. Aus dem letzten Abschnitt haben wir ersehen, daß der ursprüngliche Deformator der der Geschwindigkeit ist. Man kann auf ihn die weiteren Deformatoren aufbauen. So gibt (5.9) eine Möglichkeit aus dem Verzerrungsgeschwindigkeitsdeformator die Verschiebung zu ermitteln. Diese Gleichung läßt auch die hier herrschende Schwierigkeit erkennen, da man ja zur Lösung von (5.9) eine Annahme über die Anfangsbedingung machen muß und diese sich nicht immer eindeutig machen läßt.

Man muß weiter annehmen, daß die Beziehungen zwischen dem Spannungs- und Deformationsgeschwindigkeitstensor keine einfachen sein werden, sondern in Form einer Differentialgleichung dieser Tensoren zu geben sind. In dieser Relation werden also auch die Ableitungen ersten und eventuell auch höheren Grades nach der Zeit der beiden Tensoren vorkommen, denn bereits die einfachen empirisch ermittelten Stoffgesetze zwingen zu dieser Annahme. Zu dieser

von *Fromm* zuerst genauer präzisierten Formulierung müssen wir wieder mit *Fromm* voraussetzen, daß die Tensorableitungen nach der Zeit auf ein sich mit dem Stoffteilchen bewegendes und drehendes Koordinatensystem zu beziehen sind.

Die Translation des Koordinatensystems wird auch sonst bei der Dynamik strömender Stoffe vorausgesetzt. Die Berücksichtigung der Drehung des Koordinatensystems ist erforderlich, weil vorausgesetzt wurde, daß der antimetrische Drehungstensor nichts zum Spannungstensor beiträgt. Vom Differentialteilchen aus gesehen, passiert bei einer reinen Translation- und Drehgeschwindigkeit nichts von Bedeutung. Deshalb ist auch bei dieser Betrachtungsweise das mit der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der Rotationsgeschwindigkeit 1/2 Rot $\mathfrak{v}$ sich bewegende Koordinatensystem das rechte Bezugssystem. Diese Erörterung bekräftigt nachdrücklich den hier vertretenen Standpunkt, daß nicht der Verzerrungs- sondern der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor der unserer Betrachtungsweise angemessene Ausgangstensor ist, da er in unmittelbarer Beziehung zur Translations- und Rotationsgeschwindigkeit steht.

Es soll vereinbart werden, daß der Deformator aus dem Verschiebungsvektorfeld entwickelt mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet werden soll. 1/2 $\mathfrak{E}$ ist also mit dem Verzerrungstensor identisch. Wir setzen demnach

$$\operatorname{def} \mathfrak{s} = \mathfrak{E} = e_{ab}\, \mathfrak{e}_a\, \mathfrak{e}_b. \tag{6.1}$$

Weiter soll festgesetzt werden, daß partielle Ableitungen nach der Zeit durch Punkte über dem Buchstaben angedeutet werden. Nach dieser Vereinbarung erhalten wir:

$$\operatorname{def} \mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{E}} = \dot{e}_{ab}\, \mathfrak{e}_a\, \mathfrak{e}_b. \tag{6.2}$$

Für die Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\dot{\mathfrak{E}}$ gelten also die Ausdrücke:

$$e_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial s_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial s_\beta}{\partial x_\alpha}\right) \quad \text{und} \quad \dot{e}_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right). \tag{6.3}$$

Bei Isotropie des Stoffes, die hier stets vorausgesetzt werden soll, ist auch der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor ein Kugeltensor, wenn der Spannungstensor ein Kugeltensor ist, wie man bereits aus der Anschauung ersieht. Dies ergibt sich auch aus (1.2). Haben die Tensoren Kugelform, so ist nach dem Ausgeführten die Gestaltsänderung des Stoffes gleich Null.

Nach diesen Ausführungen liegt es nahe — und alle bekannten und erprobten Stoffgesetze sprechen dafür —, daß man die Stofftensorrelationen trennen kann. In der ersten Relation kommen nur die Kugeltensoren vor, bei denen eine Rotation des Koordinatensystems ohne Einfluß für die Ableitung nach der Zeit ist. In der zweiten Relation kommen nur die Deviatoren vor.

Diese Forderung ist weitergehend als die von *Fromm* getroffene Annahme, gemäß der bei nur zwei vom Gesetz erfaßten Tensoren diese außer koachsial auch ähnlich sind, so daß die Deviatorarten gleich sind, und die dimensionslose Größe der Form keinen Einfluß auf die Intensitäten hat. Nur bei linearen und homogenen Beziehungen führen sie zu gleichen Ergebnissen. Außerdem erlaubt die hier vertretene Auffassung eine leichte Fassung der Gesetzmäßigkeit, wenn mehr als zwei Tensorgrößen vom Gesetz erfaßt werden. In der *Fromm*schen Fassung geht man von je einer Tensorgröße der Spannung und Verformung aus und gewinnt die anderen Stoffgesetze, zu deren Formulierung mehr Größen erforderlich sind, durch Überlagerung von Stoffgesetzen mit zwei Beziehungstensoren. Dieser Prozeß scheint aber umständlicher zu sein, wenn er auch bei vielen Stoffgesetzen zum gleichen Ergebnis führt. — Die *Fromm*sche Methode ist eine synthetische, denn hier werden aus einzelnen bekannten Stoffgesetzen kompliziertere und weiterreichende aufgebaut. Bei dem hier eingeschlagenen Weg werden die bekannten Stoffgesetze als Sonderfälle eines alles umfassenden Stoffgesetzes erhalten.

7. Die Kugeltensorrelation. Bei der Kugeltensorrelation — und auch bei der im nächsten Abschnitt zu behandelnden Deviatorrelation — soll vorausgesetzt werden, daß der Einfluß der zweiten Ableitung des Spannungstensors und des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors von untergeordneter Bedeutung für das Stoffgesetz sind und daher vernachlässigt werden können. Daher werden die Tensordifferentialgleichungen ersten Grades in bezug auf die Zeit als unabhängige Variable sein.

Bei der Kugeltensorrelation soll sogar die erste Ableitung des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors vernachlässigt werden. Dies steht mit keinem der bis heute erprobten Stoffgesetze im Widerspruch. Da der Kugeltensor nur von einer Größe abhängt, kann man die Kugeltensor-

relation auch ansetzen ($\dot{e}$ ist die Mittelkomponente von $\dot{\mathfrak{E}}$) zu

$$R(\dot{e}, p, \dot{p}) = 0. \tag{7.1}$$

Nun kann man die Funktion (7.1) nach der *Mac-Laurin*-Reihe entwickeln. Bricht man diese Reihe nach den linearen Gliedern ab und trifft man eine zweckmäßige Wahl für die zwei Konstanten, die die Verhältnisse der Ableitungen an der Stelle Null ausdrücken, so erhält man die bekannte Formel

$$\dot{e} = \frac{2}{3}\frac{\dot{p}}{K} + \frac{2}{3}\frac{p}{\zeta}. \tag{7.2}$$

K ist die Kompressionsmodul und ζ der Kompressionszähigkeitswert. p/ζ wird gewöhnlich als vernachlässigbar klein gegenüber $\dot{p}/K$ angenommen. So erhalten wir schließlich

$$\dot{e} = \frac{2}{3}\frac{\dot{p}}{K} \qquad \text{bzw.} \qquad e = \frac{2}{3}\frac{p}{K}. \tag{7.3}$$

Die Beziehung (7.3) kann für alle Stoffe angenommen werden, so daß man hier die bekannte recht einfache Beziehung hat.

Unter Beachtung von (5.10) und (6.1), (6.2) läßt sich (7.3) auch darstellen in der Form

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\dot{p}}{K} \qquad \text{bzw.} \quad \operatorname{div} \mathfrak{s} = \frac{p}{K}. \tag{7.4}$$

Aus der letzten Gleichung erhält man mit ($K \to \infty$) die bekannte Kontinuitätsgleichung inkompressibler Flüssigkeiten $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$.

8. Die Deviatorrelation. Die totalen Ableitungen nach der Zeit in sich bewegendem und drehendem Koordinatensystem sollen mit einem kleinen Kreis über dem Buchstaben angedeutet werden. Die Deviatorrelation kann angesetzt werden zu

$$R(\mathfrak{P}_0, \mathring{\mathfrak{P}}_0, \dot{\mathfrak{E}}_0, \mathring{\dot{\mathfrak{E}}}_0) = 0. \tag{8.1}$$

Diese Differentialgleichung kann man wieder nach *Mac Laurin* entwickeln. Es wird wohl meist erforderlich sein, die Entwicklung nach dem linearen Glied abzubrechen, da sonst der Rechenaufwand zu groß ist. Nur wird man bei stark beanspruchten Stoffen nicht immer damit auskommen. Zeigen doch manche Stoffe im schwachbeanspruchten Zustand einen ganz anderen Charakter wie beim starker Beanspruchung. Man könnte allerdings versuchen bei solchen Stoffen die *Taylor*-Entwicklung anzusetzen. Wählt man den Ausgangspunkt dieser Entwicklung in der Nähe der vorhandenen Beanspruchungen, so wird man mit den linearen Gliedern auskommen. Auf diese Art könnte man auch die Vorgeschichte des Stoffes berücksichtigen. Doch sind hier manche Schwierigkeiten zu überwinden. Wir wollen uns auf schwach beanspruchte Stoffe beschränken. Selbstverständlich gibt es auch Stoffe, bei denen auch bei höherer Beanspruchung die Entwicklung von *Mac Laurin* mit Abbruch nach den linearen Gliedern möglich ist, wie gewisse Flüssigkeiten. Es wird aus (8.1), wenn man $R(0, 0, 0, 0)$ wegläßt, da es Null ist

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \mathfrak{P}_0}\right)_0 \mathfrak{P}_0 + \left(\frac{\partial R}{\partial \mathring{\mathfrak{P}}_0}\right)_0 \mathring{\mathfrak{P}}_0 + \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\mathfrak{E}}_0}\right)_0 \dot{\mathfrak{E}}_0 + \left(\frac{\partial R}{\partial \mathring{\dot{\mathfrak{E}}}_0}\right)_0 \mathring{\dot{\mathfrak{E}}}_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \mathfrak{P}_0^2}\right)_0 \mathfrak{P}_0 \cdot \mathfrak{P}_0 + \cdots = 0.$$

Die Ableitungen nach den Tensoren an der Stelle Null sind Konstanten und die eventuell auftretenden höheren Produkte von Tensoren zweiter Stufe sind wieder Tensoren derselben Stufe, so daß rein äußerlich diese Entwicklung nicht zum Widerspruch führt. Hier sollen aber nur die linearen Glieder berücksichtigt werden. Die Konstanten sind so gewählt, daß sich aus dem allgemeinen Gesetz die anderen bekannten Stoffgesetze als Spezialfälle entwickeln lassen. So sollen sie entsprechend der Gleichung

$$\dot{\mathfrak{E}}_0 + T_\varepsilon \mathring{\dot{\mathfrak{E}}}_0 = \frac{1}{\eta}\mathfrak{P}_0 + \frac{1}{G}\mathring{\mathfrak{P}}_0 \tag{8.2}$$

getroffen werden. In (8.2) hat G die Dimension einer Spannung und kann als Schubmodul gedeutet werden. η hat die Dimension der Zähigkeit und kann daher auch als solche aufgefaßt werden; T_ε hat die Dimension der Zeit und kann als Relaxationszeit angesehen werden, genau so wie η/G, das deshalb auch

$$\frac{\eta}{G} = T \tag{8.3}$$

geschrieben werden soll.

In (8.2) müssen die Deviatoren $\mathring{\mathfrak{E}}_0$ und $\mathring{\mathfrak{P}}_0$ nach (4.1) entwickelt werden. Man erhält

$$\mathring{\dot{\mathfrak{E}}}_0 = \frac{\partial \dot{\mathfrak{E}}_0}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \mathit{grad}\, \dot{\mathfrak{E}}_0 + [\dot{\mathfrak{E}}_0;\ \mathfrak{w}]\,, \tag{8.4a}$$

$$\mathring{\mathfrak{P}}_0 = \frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \mathit{grad}\, \mathfrak{P}_0 + [\mathfrak{P}_0;\ \mathfrak{w}]\,. \tag{8.4b}$$

Die Vektorprodukte müssen nach (1.2) berechnet werden.

Nun sollen aus (8.2) durch Grenzübergänge bekannte Stoffgesetze entwickelt werden. Setzt man $T_e \to 0$ und $G \to \infty$, so erhält man das *Newton*sche Stoffgesetz

$$\dot{\mathfrak{E}}_0 = \frac{1}{\eta}\, \mathfrak{P}_0\,. \tag{8.5a}$$

Setzt man $T_e \to 0$ und $\eta \to \infty$, so erhält man ein Stoffgesetz strömender rein elastischer Stoffe

$$\dot{\mathfrak{E}}_0 = \frac{1}{G}\, \mathring{\mathfrak{P}}_0\,. \tag{8.5b}$$

Nimmt man bei den letzten Annahmen noch einen statischen Zustand an, d.h. setzt man $\mathfrak{v} \to 0$ und damit $\mathfrak{w} \to 0$, so erhält man das *Hooke*sche Stoffgesetz

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{1}{G}\, \mathfrak{P}_0\,. \tag{8.5c}$$

Mit nur $T_e \to 0$ erhält man das *Maxwell-Fromm*sche Stoffgesetz

$$\dot{\mathfrak{E}}_0 = \frac{1}{\eta}\, \mathfrak{P}_0 + \frac{1}{G}\, \mathring{\mathfrak{P}}_0\,. \tag{8.5d}$$

Die Anfänge des letzten Gesetzes gehen auf *Maxwell* zurück, der in einer nur zweidimensionalen, noch nicht tensoriellen Darstellung und unter Vernachlässigung der Drehung des Stoffteilchens dieses Gesetz aus der Vorstellung entwickelte, daß durch Relaxation die Spannung gegen einem elastischen Anteil abnimmt. *Fromm*[1] gab diesem Gesetz die scharfe Formulierung von (8.5d) und deutete es als eine Überlagerung *Newton*scher Zähigkeit mit *Hooke*scher Elastizität.

Aus (8.2) kann man noch ein weiteres Gesetz gewinnen, das im Prinzip auch auf *Fromm*[2] zurückgeht, und das er durch synthetische Überlagerung von elastischen und plastischen Verzerrungen gewann. Setzt man nur $\eta \to \infty$, so folgt

$$\mathring{\mathfrak{P}}_0 = G\, \dot{\mathfrak{E}}_0 + \eta_e\, \mathring{\dot{\mathfrak{E}}}_0 \qquad \text{mit} \qquad G\, T_e = \eta_e\,. \tag{8.5e}$$

Ein letztes spezielles Stoffgesetz, bei dem Deformationsgeschwindigkeits- und Deformationsbeschleunigungstensor Beiträge zum Spannungstensor liefern, erhält man durch Setzen von $G \to \infty$:

$$\mathfrak{P}_0 = \eta\, (\dot{\mathfrak{E}}_0 + T_e\, \mathring{\dot{\mathfrak{E}}}_0)\,. \tag{8.5f}$$

III. Wellen in zähelastischen, isotropen Stoffen.

9. Die Wellengleichung. Das Grundgleichungssystem zähelastischer Stoffe ist:

$$\text{Kontinuitätsgleichung:}\ \operatorname{div} \varrho \mathfrak{v} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \tag{9.1}$$

$$\text{dynamische Grundgleichung:}\ \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{v} = \frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \mathfrak{P} + \mathfrak{g}, \tag{5.3}$$

$$\text{Stoffgleichungen:} \begin{cases} \operatorname{div} \mathfrak{s} = \dfrac{p}{K}, & (7.4) \\ \dot{\mathfrak{E}}_0 + T_e \mathring{\dot{\mathfrak{E}}}_0 = \dfrac{1}{\eta}\, \mathfrak{P}_0 + \dfrac{1}{G}\, \mathring{\mathfrak{P}}_0. & (8.2) \end{cases}$$

[1] *H. Fromm*, Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 43.
[2] *H. Fromm*, Ing.-Arch. 4 (1933), S. 432.

Die dynamische Grundgleichung kann mit den Stoffgleichungen so zusammengefaßt werden, daß man nur die Materialkonstanten und die Verschiebungen mit ihren Ableitungen erhält. Dies ist die Ausgangsgleichung zur Behandlung der Wellen. Diese Differentialgleichung des Strömungs- bzw. Verschiebungszustandes erfaßt mit der Kontinuitätsgleichung die Strömung vollständig. Diese Umformung soll hier nicht allgemeingültig durchgeführt werden, sondern es sollen die Vernachlässigungen getroffen werden, die für die Behandlung der Wellen in zähelastischen Medien zulässig sind. Da bei den Wellen die Spannungs- und Geschwindigkeitsänderungen gering sind, können die Produkte dieser vernachlässigt werden. Daher sollen zuerst in (8.2) die totalen Ableitungen durch die partiellen ersetzt werden, da der dadurch entstehende Fehler nur von der Größenordnung der Produkte der Geschwindigkeit und Spannung und ihren Ableitungen ist. Man erkennt, daß diese Vereinfachung bei *Newton*schen und *Hooke*schen Stoffen zu keiner Vernachlässigung führt und die Formeln daher für diese Stoffe exakt werden. Weiter soll das Produkt $\mathfrak{v} \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{v}$ in (5.3) aus demselben Grunde vernachlässigt werden.

Unter Berücksichtigung der vorhergehenden Ausführungen bilde man nun die Divergenz auf (8.2) Man erhält

$$\operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}}_0 + T_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}}_0 = \frac{1}{\eta} \operatorname{div} \mathfrak{P}_0 + \frac{1}{G} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \mathfrak{P}_0 \right). \tag{9.2}$$

In (9.2) sind $\operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}}_0$ und $\operatorname{div} \mathfrak{P}_0$ umzuformen. Es ist zuerst unter Berücksichtigung von (2.3) und (3.10) und (6.2)

$$\operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}}_0 = \operatorname{div} (\operatorname{def} \mathfrak{v}) - \operatorname{grad} (\dot{e}).$$

Wendet man auf diese Formel noch (3.9) und (5.10b) an, so erhält man schließlich

$$\operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}}_0 = \Delta \mathfrak{v} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathfrak{v}). \tag{9.3}$$

Weiter ist $\operatorname{div} \mathfrak{P}_0 = \operatorname{div} \mathfrak{P} - \operatorname{div} (p \mathfrak{F}) = \operatorname{div} \mathfrak{P} - \operatorname{grad} (p)$.

Verwendet man noch (5.3) und vernachlässigt hier $\mathfrak{v} \cdot (\operatorname{grad} \mathfrak{v})$ und $\mathfrak{g}$, so erhält man

$$\operatorname{div} \mathfrak{P}_0 = \varrho \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} \right) - \operatorname{grad} (p). \tag{9.4}$$

Setzt man in (9.2) die Formeln (9.3) und (9.4) ein, so erhält man nach einigen Umformungen unter Beachtung von (7.4) und (8.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathfrak{s}}{\partial t^3} + \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} = {} & \frac{T_\varepsilon G}{\varrho} \Delta \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} + \frac{G}{\varrho} \Delta \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} + \frac{T_\varepsilon G}{3 \varrho} \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} \right) \\ & + \frac{K}{\varrho} \left(\frac{G}{3K} + 1 \right) \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} \right) + \frac{K}{T \varrho} \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathfrak{s} \right). \end{aligned} \tag{9.5}$$

Dies ist die Wellengleichung zähelastischer Stoffe.

10. Allgemeine Lösung der Wellengleichung. a) Die Gleichungen der Planwellen. Tritt in einem Medium ein Störungszentrum auf, so wird sich diese Störung in Form von Kugelwellen nach allen Richtungen ausbreiten. In größerer Entfernung vom Störungszentrum aber kann man einen Bereich der Wellen als Planwellen ansehen.

Die Fortpflanzungsrichtung der Wellen sei die positive x_1-Achse. Dadurch werden bei den hier zu untersuchenden Planwellen die Ableitungen nach x_2 und x_3 Null. Unter diesen Voraussetzungen erhält man

$$\Delta \mathfrak{s} = \frac{\partial^2 s_a}{\partial x_1^2} \mathfrak{e}_a \qquad \text{und} \qquad \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathfrak{s}) = \frac{\partial^2 s_a}{\partial x_1^2} \mathfrak{e}_1 . \tag{10.1}$$

Setzt man (10.1) in die Wellengleichung (9.5) ein, so zerfällt diese Vektorgleichung in die drei Gleichungen mit den Richtungen $\mathfrak{e}_a$. Die Welle in der Fortpflanzungsrichtung $\mathfrak{e}_1$ ist also eine Longitudinalwelle, die Wellen in den Richtungen $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$ sind Transversalwellen und haben bis auf den Index dieselben Gleichungen. Da die Frequenz und Fortpflanzungsgeschwindigkeit der hier auftretenden Wellen gleich groß sind, werden die Lösungen bis auf die Phase gleich sein. Daher genügt es im folgenden nur eine Transversalwelle zu untersuchen. Wir wählen die in Richtung $\mathfrak{e}_2$.

Zusammengefaßt, haben wir also eine Longitudinalwelle in Richtung $\mathfrak{e}_1$ und eine Transversalwelle in Richtung $\mathfrak{e}_2$. Über die physikalische Bedeutung der beiden Wellen gibt uns folgende

Betrachtung nähere Kunde. Unter Verwendung von (3.7) bis (3.9) erhält man

$$\Delta \mathfrak{s} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathfrak{s}) + \operatorname{div}(\operatorname{Rot} \mathfrak{s}). \tag{10.2}$$

Aus (10.2) erkennt man mit (10.1), daß zur Longitudinalwelle nur die Operatoren von div $\mathfrak{s}$ und ihren zeitlichen Ableitungen beitragen. Nun ist die Divergenz von $\mathfrak{s}$ proportional p. Die Longitudinalwelle ist eine Druckwelle, so daß man sie auch als Kompressionswelle ansehen kann.

Ebenso erkennt man, daß die Transversalwelle durch Operatoren des Rotors von $\mathfrak{s}$ und seinen zeitlichen Ableitungen dargestellt wird. Demnach ist die Transversalwelle eine reine Dreh- oder Scherungswelle. Somit zerfällt die Wellengleichung für Planwellen in die Kompressions- oder Longitudinalwelle

$$\frac{\partial^3 s_1}{\partial t^3} + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = \frac{4 T_\varepsilon \cdot G}{3\varrho}\frac{\partial^4 s_1}{\partial x_1^2 \partial t^2} + \frac{K}{\varrho}\left(\frac{4G}{3K}+1\right)\frac{\partial^3 s_1}{\partial x_1^2 \partial t} + \frac{K}{T\varrho}\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} \tag{10.3a}$$

und die Scherungs- oder Transversalwelle

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial s_2}{\partial t} = \frac{T_\varepsilon G}{\varrho}\frac{\partial^3 s_2}{\partial x_1^2 \partial t} + \frac{G}{\varrho}\frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1^2}. \tag{10.3b}$$

Man erkennt aus (10.3a) und (10.3b), daß beide Wellen gedämpft sind.

b) Die Kompressionswelle. Zur Lösung der Differentialgleichung der Kompressionswelle macht man den Ansatz für gedämpfte Wellen

$$s_1 = A_k \cdot e^{-d_k x_1} e^{i\alpha\left(t - \frac{x_1}{v_k}\right)}. \tag{10.4}$$

Hier ist d_k die Dämpfung, α die Kreisfrequenz und v_k die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kompressionswelle. Setzt man (10.4) in (10.3a) ein, so erhält man zur Bestimmung von d_k und v_k die zwei Gleichungen

$$2\frac{K}{T}\frac{d_k}{v_k}\left(1 - \frac{4}{3}\alpha^2\frac{G}{K}T T_\varepsilon\right) + K\left(1+\frac{4G}{3K}\right)\left(d_k^2 - \frac{\alpha^2}{v_k^2}\right) = -\alpha^2\varrho,$$

$$\frac{K}{T}\left(1 - \frac{4}{3}\alpha^2\frac{G}{K}T T_\varepsilon\right)\left(d_k^2 - \frac{\alpha^2}{v_k^2}\right) - K\left(1+\frac{4G}{3K}\right)\alpha^2\frac{2 d_k}{v_k} = -\frac{1}{T}\alpha^2\varrho.$$

Es ist zweckmäßig, die Gleichungen nicht vollständig aufzulösen, sondern die Lösung so anzugeben:

$$\frac{\alpha^2}{v_k^2} - d_k^2 = \frac{\alpha^2}{C^2}, \qquad d_k = \alpha v_k D \tag{10.5}$$

mit

$$C^2 = \frac{K}{\varrho}\frac{(1-\varepsilon_2)^2 + (1+\varepsilon_1)^2\alpha^2 T^2}{(1-\varepsilon_2) + (1+\varepsilon_1)\alpha^2 T^2} \tag{10.5a}$$

und

$$D = \frac{\varrho}{2K}\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha T}{(1-\varepsilon_2)^2 + (1+\varepsilon_1)^2\alpha^2 T^2} \tag{10.5b}$$

und den Werten

$$\varepsilon_1 = \frac{4G}{3K} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = \frac{4G}{3K}\alpha^2 T T_\varepsilon. \tag{10.5c}$$

c) Die Scherungswelle. Man setze wieder als Lösung an

$$s_2 = A_s e^{-d_s x_1} e^{i\alpha\left(t - \frac{x_1}{v_s}\right)}. \tag{10.6}$$

Hier wird also die Dämpfung mit d_s und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit v_s bezeichnet. Die Kreisfrequenz kann wieder mit α bezeichnet werden, da diese nur von der Erregerfrequenz abhängt und mit dieser identisch ist. Setzt man (10.6) in (10.3b) ein, so erhält man die Bestimmungsgleichungen für d_s und v_s.

$$G\left(d_s^2 - \frac{\alpha^2}{v_s^2}\right) - G T_\varepsilon \alpha^2 \frac{2 d_s}{v_s} = -\varrho\alpha^2,$$

$$G T_\varepsilon\left(d_s^2 - \frac{\alpha^2}{v_s^2}\right) + G\frac{2 d_s}{v_s} = \frac{1}{T}\varrho.$$

Wieder ist es nicht zweckmäßig, die Gleichungen nach v_s und d_s aufzulösen, sondern die Lösung in der nachstehenden Form anzugeben:

$$\frac{\alpha^2}{v_s^2} - d_s^2 = \frac{\alpha \varrho}{\eta} \frac{\alpha (T - T_e)}{(1 + \alpha^2 T_e^2)}, \tag{10.7a}$$

$$d_s = \frac{v_s \varrho}{2 \eta} \frac{1 + \alpha T \alpha T}{1 + \alpha^2 T_e^2}. \tag{10.7b}$$

11. Diskussion der Wellengleichung-Lösungen. a) Analyse der Kompressionswelle. Es sollen *Maxwell-Frommsche* Stoffe (8.5d) behandelt werden. Bei diesen wird $T_e \to 0$, d. h. in (10.5a) und (10.5b) wird ε_2 Null. Zuerst soll die Annahme $\alpha T \gg 1$ untersucht werden. Unter dieser Vorraussetzung wird nach (10.5a) und (10.5b)

$$C^2 = \frac{K}{\varrho}\left(1 + \frac{4G}{3K}\right) \qquad \text{und} \qquad D = \frac{\varrho}{2K} \frac{\frac{4G}{3K}}{\left(1 + \frac{4G}{3K}\right)^2 \alpha T}.$$

Setzt man diese Werte in (10.5) ein und beachtet, daß $4G/3K$ stets kleiner als eins und αT sehr viel größer als eins ist, so findet man, daß d_k^2 neben α^2/v_k^2 vernachlässigt werden kann (10.5). Damit wird $v_k = C$. So erhält man

$$v_k = \sqrt{\frac{K}{\varrho}\left(1 + \frac{4G}{3K}\right)} = \sqrt{3 \frac{K}{\varrho} \frac{1 - \mu}{1 + \mu}}. \tag{11.1a}$$

Dabei ist μ die *Poissonsche* Zahl, definiert durch $\frac{K}{G} = \frac{2}{3} \frac{1 + \mu}{1 - 2\mu}$. Ferner ist

$$d_k = \frac{2}{3} \frac{G/K}{(1 + 4G/3K) v_k T} \tag{11.1b}$$

Bei *Hookeschen* Stoffen wird T unendlich groß. Damit wird für diese Stoffgruppe die Dämpfung Null und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kann nach (11.1a) berechnet werden, was mit der Theorie übereinstimmt. Selbstverständlich ist das Gesetz von *Hooke* nur ein Grenzgesetz und (11.1) gibt uns die Möglichkeit, die Dämpfung fester Stoffe zu berechnen, bei denen die hohe Relaxationszeit bekannt ist. Bei Glas gelten die Werte

$$T = 100 \text{ sec}, \quad G/K = 0{,}6, \quad K = 3{,}3 \cdot 10^8 \text{ Pond/cm}^2.$$

Mit diesen Werten erhält man für Glas

$$v_{k\,Glas} = 5000 \text{ m/sec} \qquad \text{und} \qquad d_{k\,Glas} = \frac{1}{750 \text{ km}}. \tag{11.2}$$

Also würde erst in 750 km Entfernung die Amplitude der Kompressionswelle in Glas auf 30% abnehmen.

In Flüssigkeiten ist bei *Maxwell-Frommschen* Medien $4G/3K$ neben eins vernachlässigbar. Man erhält dann

$$v_k = \sqrt{\frac{K}{\varrho}}, \qquad d_k = \frac{2\eta}{3 v_k K T^2} = \frac{2G^2}{3 v_k^3 \eta \varrho}. \tag{11.3}$$

Für v_k erhält man die bekannte Formel für Flüssigkeiten. Die Dämpfung d_k hängt vom Schubmodul G der Flüssigkeiten, deren Wert bis jetzt noch nicht mit Sicherheit festgestellt ist. Bei Wasser von 20° C ist $K = 2 \cdot 10^7$ Pond/cm² und $\eta = 10^{-5}$ Pond · sec/cm². Man erhält

$$v_{k\,Wasser} = 1430 \text{ m/sec} \qquad \text{und} \qquad d_{k\,Wasser} = \frac{1 \text{ sec}^2}{4{,}3 \cdot 10^{12} \text{ km} \cdot T^2}. \tag{11.4}$$

Da im Wasser die Dämpfung als gering festgestellt ist, kann man sagen, daß hier die Relaxationszeit T nicht zu gering sein kann, wenn Wasser eine *Maxwellsche* Flüssigkeit ist. Liegt die Dämpfung bei $d_k = 1/430$ km, so ist $T = 10^{-6}$. Diese Werte können richtig sein. Man muß aber beachten, daß die Nebenbedingung $\alpha T \gg 1$ erfüllt sein muß, so daß man mit Ultraschall von über 10^5 Hertz arbeiten muß. Man erkennt die Schwierigkeiten zur Abschätzung des Schubmoduls des Wassers.

Nun soll die Annahme $\alpha T \ll 1$ mit $T_e = 0$ betrachtet werden. Obige Bedingung ist im wesentlichen das Kriterium für *Newtonsche* Flüssigkeiten. Man erhält aus (11.1)

$$v_k = \sqrt{\frac{K}{\varrho}}, \qquad d_k = \frac{2}{3} \frac{\alpha^2 \eta}{K v_k}. \tag{11.5}$$

Dies sind die bekannten Formeln für *Newton*sche Flüssigkeiten wieder. v_k stimmt mit der Formel für *Maxwell-Fromm*sche Flüssigkeiten überein. Dagegen nimmt hier die Dämpfung quadratisch mit der Frequenz zu. Sie bleibt allerdings auch hier noch sehr gering. Im vorher untersuchtem Falle ist die Dämpfung frequenzunabhängig.

Ähnlich kann man auch bei weiteren Stoffen vorgehen. Es soll aber hier nicht durchgeführt werden, da sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kaum von den bisherigen Formeln ändert, während die Dämpfung auch hier bei sehr kleinen und kaum meßbaren Werten liegen wird.

Zusammenfassend kann man sagen, daß bei fast allen Stoffen die Kompressionswellengeschwindigkeit nach (11.3) bzw. (11.5) berechnet werden kann — nur bei ausgesprochenen *Hooke*schen Stoffen liegt sie um 20 bis 25% höher — und daß die Dämpfung sehr gering und nur schwer feststellbar ist.

b) Analyse der Scherungswelle. Die Auswertung der Gleichungen (10.7) für *Maxwell-Fromm*sche Stoffe mit den Bedingungen $\alpha T \gg 1$ und $T_e = 0$ ergibt

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}, \qquad d_s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{\eta T}} = \frac{1}{2\eta}\sqrt{\varrho G}. \tag{11.6}$$

Man erhält also für v_s die bekannte Formel für *Hooke*sche Stoffe, die demnach allgemein für *Maxwell-Fromm*sche Stoffe gilt. Ebenso erhält man, daß die Dämpfung der Scherungswelle reiner *Hooke*scher Stoffe Null ist, da bei diesen $\eta \to \infty$ geht. Für Glas erhält man

$$d_{s\,Glas} = \frac{1}{500\ \mathrm{km}}. \tag{11.7}$$

Bei Glas also liegt die Dämpfung in der Größenordnung der Dämpfung der Kompressionswelle.

Bei Flüssigkeiten wird wegen der geringen Zähigkeit die Dämpfung beträchtlich. Für Wasser von 20° wird die Relaxationszeit kleiner als 10^{-2} sec sein. Damit erhält man

$$d_{s\,Wasser} \leq \frac{1}{0{,}02\ \mathrm{cm}}. \tag{11.8}$$

Es ist also nach bereits zwei mm die Amplitude der Scherungswelle nur noch 0,005% von der der ursprünglichen Größe. Damit ist gezeigt, daß sich in *Maxwell*schen Flüssigkeiten keine Scherungswellen ausbilden können. Man konnte sie also auch nicht beobachten.

Bei *Newton*schen Flüssigkeiten, d. h. $\alpha T \ll 1$ wird

$$v_s = \sqrt{2\,\alpha\,\frac{\eta}{\varrho}}, \qquad d_s = \sqrt{\frac{\varrho\,\alpha}{2\,\eta}}. \tag{11.9}$$

Die Größen v_s und d_s hängen nicht mehr von G ab. Dies muß bei *Newton*schen Flüssigkeiten der Fall sein. Im Pond-cm-sec-System ist η/ϱ größenordnungsmäßig bei eins. Es wird dann

$$d_s \approx \sqrt{\alpha/2}\ 1/\mathrm{cm}, \qquad v_s \approx \sqrt{2\,\alpha}\ \mathrm{cm/sec}. \tag{11.10}$$

Damit ist v_s sehr klein und man kann α nicht klein genug wählen, um meßbare d_s-Werte zu erhalten. Es ist damit bewiesen, daß sowohl in *Maxwell*schen als auch *Newton*schen Flüssigkeiten kaum Scherungswellen auftreten können.

12. Zusammenfassung. Mit Hilfe des Tensorkalküls wird ein sehr allgemeiner Ansatz für ein Stoffgesetz zähelastischer, isotroper Medien gemacht, in dem die bekannten Stoffgesetze als Sonderfälle enthalten sind. Näher behandelt wird die linearisierte Form der Tensorrelation. Die Wellengleichung zähelastischer Stoffe wird entwickelt und für Planwellen weiter behandelt. Die Scherungs- und Kompressionswelle werden diskutiert.

(Eingegangen am 10. Januar 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *E. Pieruschka*, Kassel-Wilhelmshöhe, Bergstr. 15.

Längsbewegung eines Rotationskörpers in der Flüssigkeit.

Von W. Müller.

1. Einleitung. Man erhält bekanntlich geschlossene Rotationskörper mit dem momentaren Geschwindigkeitsfeld in der umgebenden Flüssigkeit, wenn man auf der Achse eine gewisse Verteilung von Quellen und Senken so annimmt, daß die Gesamtergiebigkeit längs der Belegungsstrecke verschwindet. Bei der Wahl der Quellsenkenanordnung hat man sich zunächst im Anschluß an die bekannte Arbeit von *Fuhrmann*[1] beschränkt auf eine Zusammensetzung von einfachen Quell- und Senkenelementen, vor allem Quell- und Senkenpunkten, Quell- und Senkenstrecken mit konstanter oder linear veränderlicher Stärke — ich werde diese Formen kurz als lineare (bzw. quadratische) Quell- oder Senkenkeile bezeichnen —, die meist in unstetiger Weise aneinander angeschlossen werden. Um einen möglichst gleichmäßigen Druckverlauf zu erhalten, empfiehlt es sich, wie die Prüfung ergibt, als Quellsenkenverteilung eine stetige Funktion zu Grunde zu legen, deren Ableitungen sich auch stetig verhalten. Der wesentliche Vorteil dieser Voraussetzung, insbesondere bei rational-ganzen Funktionen, spricht sich darin aus, daß die mathematische Behandlung sich wesentlich eleganter und übersichtlicher gestaltet als bei dem *Fuhrmann*schen Verfahren, wenn man gleichzeitig Ellipsoid-Koordinaten und bei der weiteren Ausgestaltung der Rechnung Kugelfunktionen verwendet, nach denen alle Ausdrücke zudem in endlicher Form entwickelbar sind. Eine möglichst genaue Tabulierung dieser Funktionengruppe würde genügen, um ohne Schwierigkeit z. B. bei gegebener Körperbegrenzung, selbst für den Fall einer sehr allgemeinen Bewegung alle Strömungsdaten, z. B. auch die Druckverteilung längs der Oberfläche mit beliebiger Genauigkeit berechnen zu können. Es soll zunächst die Methode an dem Fall der Längsbewegung entwickelt werden.

I. Allgemeine Grundlagen.

2. Die Grundfunktionen der Bewegung. Die Bewegung des Körpers möge abgeleitet werden aus einer Quellsenkenverteilung $f(t)$ längs einer auf der Achse gelegenen, von $t=-1$ bis $t=+1$ reichenden Strecke. Es ergibt sich das Potential der Absolutbewegung der Flüssigkeit

$$\Phi = -\frac{A_0}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{f(t)\,dt}{r}, \tag{1}$$

wo $r=\sqrt{(x-t)^2+\eta^2}$ zu setzen und x die achsiale und η die radiale Koordinate bedeutet. Wenn man den Winkel ϑ zwischen der Achsenrichtung und dem Fahrstrahl vom Punkt $x=t$ der Grundstrecke nach dem Aufpunkt (x,η) einführt, so wird

$$\Phi = -\frac{A_0}{4\pi}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\frac{f(x-\eta\operatorname{ctg}\vartheta)\,d\vartheta}{\sin\vartheta}, \tag{2}$$

wobei die sog. „Schließungsbedingung“

$$\int_{-1}^{+1} f(t)\,dt = 0 \tag{3}$$

als erfüllt gelten soll. Das Integral (2) läßt sich, wenn $f(t)$ eine ganze rationale Funktion ist, stets in geschlossener Form ausführen.

---

[1] *G. Fuhrmann*, Theoret. u. experiment. Untersuchung an Ballonmodellen. Göttinger Diss. 1911. — *Th. v. Kármán*, Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern, Abhandlungen aus dem aerodyn. Institut Aachen, Heft 6, S. 3. Berlin 1927. — *I. Lotz*, Ing.-Arch. 11 (1931), S. 507. — *M. Munk*, The aerodynamic forces on airship hulls, N. A. C. A., Techn. Rep. 184, Ann. Rep. 9 (1923 u. 1924), S. 453. — *W. Fr. Durand*, Aerodynamic Theory, Bd. 1, S. 277. Berlin 1934; Bd. VI, S. 32. Berlin 1936; Handbuch der Experimentalphysik (*W. Wien*, *F. Harms*), Bd. IV, 3. Teil, S. 164. 186 (*W. Klemperer*). Leipzig 1930. — *H. Multhopp*, Luftfahrtforschg. 18 (1934), S. 52. — *W. Müller*, Mathemat. Strömungslehre, S. 60—77. Berlin 1928; Ing.-Arch. 14 (1944), S. 332; Ing.-Arch. 18 (1950), S. 338. — *W. Müller* u. *Fr. Eser*, Zur Theorie der Strömung um rotationsasymmetrische Rumpfkörper, Bericht der Messerschmitt-Werke, 1944.

Wir führen nun zweckmäßigerweise Ellipsoid-Koordinaten ζ, μ ein, die mit x, η durch die Gleichungen

$$x = \zeta\,\mu\,, \qquad \eta = \sqrt{(\zeta^2-1)(1-\mu^2)} \qquad (\mu^2 \leq 1\,,\quad \zeta \geq 1) \tag{4}$$

verbunden sind [1]. Für die Potentialfunktion Φ und die Stromfunktion, Ψ der Absolutströmung gelten dann die Beziehungen [2]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = (1-\mu^2)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\,, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} = -\,(\zeta^2-1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\,. \tag{5}$$

Es ist ferner bekannt, daß die Potentialfunktion im Außengebiet durch eine Summe von Produkten der *Legendre*schen Kugelfunktionen erster und zweiter Art $P_\nu(\mu)$ und $Q_\nu(\zeta)$, d. h. in der Form

$$\Phi = -\,\frac{A}{2\pi}\sum_\nu \alpha_\nu\, P_\nu(\mu)\,Q_\nu(\zeta) \tag{6}$$

darstellbar ist [1]. Wenn wir noch die zugeordneten und die neu eingeführten überstrichenen Funktionen, d. h. P_ν^1, Q_ν^1, $\overline{P}_\nu$, $\overline{Q}_\nu$; verwenden, die mit P_ν und Q_ν durch die Beziehungen [3]

$$P_\nu'\sqrt{1-\mu^2} = P_\nu^1 = \frac{\overline{P}_\nu}{\sqrt{1-\mu^2}}\,, \qquad Q_\nu'\sqrt{\zeta^2-1} = Q_\nu^1 = -\,\frac{\overline{Q}_\nu}{\sqrt{\zeta^2-1}} \tag{7}$$

verknüpft sind, so läßt sich die Stromfunktion auch in der folgenden Weise darstellen:

$$\Psi = \frac{A}{2\pi}\sum \frac{\alpha_\nu}{\nu(\nu+1)}\,\overline{P}_\nu\overline{Q}_\nu = -\,\frac{A}{2\pi}\,\eta\sum \frac{\alpha_\nu}{\nu(\nu+1)}\,P_\nu^1 Q_\nu^1 = -\,\frac{A}{2\pi}\,\eta^2\sum_\nu \frac{\alpha_\nu}{\nu(\nu+1)}\,P_\nu' Q_\nu'\,, \tag{8}$$

wobei noch die Formeln zu beachten sind

$$\frac{d\overline{P}_\nu}{d\mu} = -\,\nu(\nu+1)\,P_\nu\,, \qquad \frac{d\overline{Q}_\nu}{d\zeta} = -\,\nu(\nu+1)\,Q_\nu\,. \tag{9}$$

Da die Stromfunktion für die Parallelströmung mit der Geschwindigkeit v_1 in der negativen x-Richtung die Form $\Psi_0 = -\,\frac{1}{2}\,v_1\,\eta^2$ hat, so ergibt sich als Stromfunktion der Relativströmung

$$\Psi' = -\,\frac{A}{2\pi}\,\eta^2\sum \frac{\alpha_\nu}{\nu(\nu+1)}\,P_\nu'(\mu)\,Q_\nu'(\zeta) - \frac{1}{2}\,v_1\,\eta^2 = \text{konst} = c\,, \tag{10}$$

und damit erhalten wir mit $c = 0$ die Gleichung der Meridiankontur des Drehkörpers in der Gestalt

$$\frac{A}{\pi v_1}\sum_\nu \frac{\alpha_\nu}{\nu(\nu+1)}\,P_\nu'(\mu)\,Q_\nu'(\zeta) + 1 = 0\,, \tag{11}$$

die wir in besonderen Fällen weiter auswerten werden.

3. Die Berechnung der Geschwindigkeiten. Um die absoluten Geschwindigkeitskomponenten zu ermitteln, gehen wir aus von den Gleichungen

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,, \qquad v_\eta = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\,. \tag{12}$$

Benutzen wir zur Reduktion auf Ellipsoidkoordinaten die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dx} &= \frac{\mu(\zeta^2-1)}{\zeta^2-\mu^2}\,, & \frac{\partial \mu}{dx} &= \frac{\zeta(1-\mu^2)}{\zeta^2-\mu^2}\,, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} &= \frac{\zeta\eta}{\zeta^2-\mu^2}\,, & \frac{\partial \mu}{\partial \eta} &= -\,\frac{\mu\eta}{\zeta^2-\mu^2}\,, \end{aligned}\right| \tag{13}$$

---

[1] Zur praktischen Berechnung ist es vorteilhaft $\zeta = \mathfrak{Cos}\,\gamma$, $\mu = \cos\delta$ zu setzen. Dann wird

$$x = \mathfrak{Cos}\,\gamma\cos\delta\,, \qquad \eta = \mathfrak{Sin}\,\gamma\sin\delta\,.$$

[2] Vgl. *H. Lamb*, Lehrbuch der Hydrodynamik, dtsch. v. *E. Helly*, 2. Aufl. herausg. von *v. Mises*, S. 152f., Leipzig 1931.

[3] Für die weiteren später verwendeten Formeln verweisen wir auf *W. Magnus* u. *Fr. Oberhettinger*, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, S. 49ff., Berlin 1943 und *E. Madelung*, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.

so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{\zeta^2-\mu^2}\left[\mu(\zeta^2-1)\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}+\zeta(1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right]=\frac{1}{\zeta^2-\mu^2}\left(\zeta\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}-\mu\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right),\\ v_\eta &= \frac{\eta}{\zeta^2-\mu^2}\left(\zeta\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}-\mu\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)=-\frac{\eta}{\zeta^2-\mu^2}\left[\frac{\zeta}{\zeta^2-1}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}+\frac{\mu}{1-\mu^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}\right]. \end{aligned}\right| \qquad (14)$$

Mit Hilfe von (7) und (9) und der Beziehungen

$$\frac{d\bar{P}_\nu}{d\mu}=(1-\mu^2)P_\nu''-2\mu P_\nu', \qquad \frac{d\bar{Q}_\nu}{d\zeta}=-(\zeta^2-1)Q_\nu''-2\zeta Q_\nu' \qquad (15)$$

ergeben sich durch eine einfache Rechnung die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} v_x' &= -\frac{A}{2\pi}\frac{\eta^2}{(\zeta^2-\mu^2)}\sum_\nu\frac{\alpha_\nu}{\nu(\nu+1)}(\zeta P_\nu' Q_\nu''-\mu P_\nu'' Q_\nu')=-\frac{A}{2\pi}\frac{\eta^2}{(\zeta^2-\mu^2)}\sum\alpha_\nu X_\nu,\\ v_{\bar\eta} &= v_\eta' = -\frac{A\eta}{2\pi(\zeta^2-\mu^2)}\sum_\nu\alpha_\nu(\zeta P_\nu Q_\nu'-\mu P_\nu' Q_\nu)=-\frac{A\eta}{2\pi(\zeta^2-\mu^2)}\sum\alpha_\nu Y_\nu, \end{aligned}\right| \qquad (16)$$

in denen auch statt der Kugelfunktionen und ihrer Ableitungen auch die zugeordneten oder überstrichenen Funktionen eingeführt werden können.

Zwischen den auftretenden Funktionen X_ν und Y_ν besteht, wie man leicht feststellt, die Differentialbeziehung

$$\nu(\nu+1)X_\nu=\frac{\partial^2 Y_\nu(\zeta\mu)}{\partial\zeta\,\partial\mu} \qquad (17)$$

Ferner erhalten wir mit $T_\nu=\dfrac{P_\nu' Q_\nu'}{\nu(\nu+1)}$ und $S_\nu=\dfrac{Q_\nu'' P_\nu''}{(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)}$ die Rekursionsformeln

$$X_\nu=X_{\nu-2}-(2\nu-1)(\zeta^2-\mu^2)S_{\nu-1}; \qquad Y_\nu=Y_{\nu-2}-(2\nu-1)(\zeta^2-\mu^2)T_{\nu-1} \qquad (18)$$

Man kann auch statt P und Q und ihren Ableitungen die zugeordneten oder die überstrichenen Funktionen einführen. So erhält man z. B. mit $\bar{T}_\nu=-\eta^2 T_\nu$

$$\left.\begin{aligned} Y_\nu &= \frac{1}{\nu\eta^2}(\zeta\bar{P}_{\nu-1}\bar{Q}_\nu-\mu\bar{P}_\nu\bar{Q}_{\nu-1}),\\ X_\nu &= \frac{1}{\nu\eta^2}\left(\frac{\zeta}{\zeta^2-1}\bar{P}_\nu\bar{Q}_{\nu-1}+\frac{\mu}{1-\mu^2}\bar{P}_{\nu-1}\bar{Q}_\nu\right)-\frac{\nu-1}{\eta^4}(\zeta^2-\mu^2)\bar{T}_\nu. \end{aligned}\right| \qquad (19)$$

Aus dem Quadrat $v'^2=v_\nu'^2+v_\eta^2$ der Relativgeschwindigkeit und dem Staudruck p_0 berechnet sich der Druckverlauf $p=p_0\left(1-\dfrac{v'^2}{v_1^2}\right)$ längs der Oberfläche.

4. Zusammenhang zwischen den Grundfunktionen Φ und Ψ und der erzeugenden Quellsenkenverteilung $f(t)$. Unter der Voraussetzung der Darstellbarkeit (6) wollen wir die Annahme machen, daß der Punkt $\zeta\mu$ sehr nahe der Grundstrecke liegt, also η sehr klein ist. Da ζ auf der Achse zwischen den Punkten $x=-1$ und $+1$ den Wert 1 annimmt, so wird

$$\lim_{\zeta\to1}Q_\nu(\zeta)=\lim\frac{1}{2}\frac{\zeta+1}{\zeta-1}.$$

Nun ist für $\zeta\approx1$, $x\approx\mu$ wegen $\zeta^2-1=\dfrac{\eta^2}{1-\mu^2}$

$$\zeta=1+\frac{1}{2}\frac{\eta^2}{1-x^2}+\cdots, \qquad \frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\approx\lg 2-\lg\eta,$$

also

$$\alpha_\nu P_\nu(\mu)Q_\nu(\zeta)=-\alpha_\nu P_\nu(\mu)\lg\eta.$$

Das Potential nimmt somit in der Grenze für achsennahe Punkte die Form an

$$\lim_{\eta\to0}\Phi=\frac{A}{2\pi}\sum\alpha_\nu P_\nu(t)\lg\eta. \qquad (20)$$

Dieser Ausdruck ist aber, wie man sieht, unmittelbar vergleichbar mit der Form des ebenen Potentials in der Umgebung eines Quellpunktes als Spur eines unendlich langen Quellfadens mit der Ergiebigkeit q der Längeneinheit

$$\Phi=\frac{q}{2\pi}\lg\eta,$$

und man wird daher zu der folgenden Darstellung

$$f(t) = \sum_{\nu} \alpha_\nu P_\nu(t) \tag{21}$$

der Verteilungsfunktion $f(t)$ geführt, die man nur nach den gewöhnlichen Kugelfunktionen $P_\nu(t)$ zu entwickeln braucht, um die Koeffizienten α_ν zu erhalten. Diese Entwickelung ist aber unmittelbar und ohne Schwierigkeit durchzuführen, und zwar gehören zu einer rationalen ganzen Funktion $f(t)$ vom n-ten Grade n Koeffizienten α, die wegen

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu(t)\, P_n(t)\, dt = 0 \,(\nu \neq n)\,, \qquad \int_{-1}^{+1} [P_\nu(t)]^2 dt = \frac{2}{2\nu+1} \tag{22}$$

in der Integralform

$$\alpha_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(t)\, P_\nu(t)\, dt \tag{23}$$

darstellbar sind [1]. Wenn aber die Koeffizienten α_ν aus dieser Entwickelung bestimmt sind, so gelangt man unmittelbar zum Aufbau der Potential- und Stromfunktion, die wieder zur Gleichung der Meridiankontur des Rotationskörpers führt. Man gewinnt damit z. B. folgende allgemeine Darstellung des Potentials, wenn die als stetig oder stückweise stetig angenommene Funktion $f(t)$ gegeben ist:

$$\Phi = -\frac{A}{4\pi} \sum_{\nu} (2\nu+1)\, P_\nu(\mu) Q_\nu(\zeta) \int_{-1}^{+1} f(t)\, P_\nu(t)\, dt\,. \tag{24}$$

Entsprechend hat man z. B. für die Meridiankontur als Nullstromlinie der Relativströmung die Gleichung

$$\frac{A}{2\pi v_1} \sum_{\nu} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} P'_\nu(\mu) Q'_\nu(\zeta) \int_{-1}^{+1} f(t)\, P_\nu(t)\, dt + 1 = 0\,, \tag{25}$$

wo die Konstante $A/\pi v_1$ das Streckungsverhältnis, d.h. das Verhältnis der Länge des Körpers zum größten Durchmesser bestimmt.

Aus der Gleichung (22) folgt unter anderem, daß bei Bestehen der Schließungsbedingung (3) wegen $P_0(\mu) = 1$ der Koeffizient $\alpha_0 = 0$ wird, daß also bei stetiger Quellsenkenverteilung das Glied mit dem Index Null in der Entwickelung (6) nicht vorkommt. Ist im besonderen der Punkt $t = -1$ eine Wurzel von $f(t) = 0$, hat also der Körper am hinteren Ende eine kegelartige Zuspitzung, so wird wegen $P_\nu(-1) = (-1)^\nu$

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \cdots = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots = \alpha_2 + \alpha_4 + \cdots \tag{26}$$

Die mit alternierenden Vorzeichen geschriebene Reihe der Koeffizienten α_ν hat also die Summe Null oder die Summe der α mit geraden Zeigern ist gleich der Summe mit ungeraden Zeigern. Diese Regeln werden weiter unten für einzelne Fälle ihre Bestätigung finden.

Wenn die genau tabulierten Kugelfunktionen P_ν und Q_ν, sowie etwa $\overline{P}_\nu$ und $\overline{Q}_\nu$ benutzt werden können, so gelingt es, für eine etwa graphisch gegebene Kontur bei Benutzung der Koordinaten ζ, μ für eine Reihe von Punkten die Gleichung der Kontur in Ansatz zu bringen und daraus die Koeffizienten α_ν aus einem System von linearen Gleichungen zu ermitteln. Nach Kenntnis dieser Koeffizienten ist dann auch der gesamte Strömungsverlauf in der Umgebung des Körpers, unter anderem auch der Druckverlauf an der Oberfläche als bekannt anzusehen.

5. Bemerkungen über die Funktionen $\overline{P}_n$ und $\overline{Q}_n$. Da fast alle benötigten Ausdrücke auf die neu eingeführten Funktionen $\overline{P}_n$ und $\overline{Q}_n$ zurückführbar sind, die sich daher als besonders wichtig erweisen, so wollen wir einige Angaben für die Berechnung vorausschicken. Die ersten Funktionen $\overline{P}_n(\mu)$, die $1-\mu^2$ als gemeinsamen Faktor haben, sind z. B.

$$\overline{P}_0 = 0\,, \quad \overline{P}_1 = 1-\mu^2\,, \quad \overline{P}_2 = 3\mu(1-\mu^2)\,, \quad \overline{P}_3 = \frac{3}{2}(5\mu^2-1)(1-\mu^2)\,. \tag{27}$$

Dabei gilt, sowohl für die $\overline{P}$ wie für die $\overline{Q}$ die Rekursionsformel

$$\overline{P}_n = \frac{2n-1}{n-1}\mu\overline{P}_{n-1} - \frac{n}{n-1}\overline{P}_{n-2}; \qquad \overline{Q}_n = \frac{2n-1}{n-1}\zeta\overline{Q}_{n-1} - \frac{n}{n-1}\overline{Q}_{n-2}\,. \tag{28}$$

[1] Vgl. etwa *Frank* u. *Mises*, Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, I. Bd., S. 437f., S. 302. Braunschweig 1930; ferner *Magnus* u. *Oberhettinger*, a. a. O. S. 51.

Die ersten Q-Funktionen sind z. B.

$$\bar{Q}_0 = 1\,, \quad \bar{Q}_1 = \zeta - \frac{1}{2}(\zeta^2 - 1)\lg\frac{\zeta+1}{\zeta-1} = \zeta - (\zeta^2-1)\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{\zeta}\,. \tag{29}$$

Da bei einem Ellipsoid mit $\zeta = \zeta_0$ das Verhältnis der Länge zum größten Durchmesser $\lambda = \zeta_0/\sqrt{\zeta_0^2 - 1}$ beträgt, so wird z. B. für $\lambda = 5$, $\zeta_0 = 1{,}041$. Für langgestreckte Rotationskörper, die wir hier

Tabelle I der $\bar{Q}$-Funktionen.

ζ	$\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{\zeta}$	$\zeta^2 - 1$	$\bar{Q}_1$	$\bar{Q}_2$	$\bar{Q}_3$	$\bar{Q}_4$	$\bar{Q}_5$
1,001	3,800005	0,002	0,9934	0,9832	0,9703	0,9554	0,9139
1,002	3,4770	0,004004	0,9881	0,9702	0,9483	0,9235	0,8967
1,003	3,252	0,00601	0,9835	0,9592	0,9300	0,8976	0,8632
1,004	3,108	0,00802	0,9791	0,9491	0,9135	0,8745	0,8337
1,005	2,997	0,010025	0,9749	0,9393	0,8976	0,8525	0,8057
1,006	2,906	0,01204	0,9710	0,9305	0,8837	0,8336	0,7823
1,007	2,829	0,01405	0,9673	0,9222	0,8707	0,8163	0,7612
1,008	2,7625	0,01606	0,9636	0,9140	0,8579	0,7992	0,74015
1,009	2,704	0,01808	0,9601	0,9062	0,8457	0,7828	0,7200
1,010	2,652	0,0201	0,9567	0,8988	0,8344	0,7680	0,7023
1,011	2,604	0,02212	0,9534	0,8917	0,8236	0,7539	0,6854
1,012	2,561	0,02414	0,9502	0,8848	0,8134	0,7410	0,6705
1,013	2,521	0,02617	0,9470	0,8779	0,8028	0,7270	0,6535
1,014	2,484	0,02820	0,9439	0,8715	0,7933	0,7149	0,6394
1,015	2,450	0,03023	0,9410	0,8652	0,7840	0,7032	0,6284
1,016	2,418	0,03226	0,9380	0,8590	0,7749	0,6916	0,6124
1,017	2,388	0,03429	0,9352	0,8533	0,7668	0,6819	0,60185
1,018	2,360	0,03682	0,9323	0,8472	0,7578	0,6704	0,5883
1,019	2,333	0,03836	0,9295	0,8415	0,7494	0,6598	0,5760
1,020	2,3075	0,0404	0,9268	0,8360	0,7416	0,6503	0,5654
1,021	2,283	0,0424	0,9241	0,8305	0,7338	0,6407	0,5547
1,022	2,260	0,0445	0,9215	0,8252	0,7262	0,6315	0,5444
1,023	2,2385	0,0465	0,9188	0,8199	0,7186	0,6221	0,5336
1,024	2,2174	0,0486	0,9163	0,8149	0,7116	0,6138	0,5247
1,025	2,197	0,0506	0,9138	0,8099	0,7046	0,6053	0,5153
1,026	2,178	0,0527	0,9113	0,8049	0,6976	0,5971	0,5064
1,027	2,159	0,0547	0,9088	0,8001	0,6910	0,5891	0,4975
1,028	2,141	0,0568	0,9064	0,7953	0,6844	0,5812	0,4888
1,029	2,124	0,0588	0,9040	0,7907	0,6779	0,5734	0,4802
1,030	2,107	0,0609	0,9017	0,7863	0,6721	0,5669	0,4737
1,031	2,091	0,0630	0,8994	0,7817	0,6659	0,5597	0,4660
1,032	2,076	0,0652	0,8970	0,7771	0,6594	0,5517	0,4568
1,033	2,060	0,0671	0,8948	0,7730	0,6541	0,5459	0,4512
1,034	2,046	0,0692	0,8925	0,7686	0,6481	0,5388	0,4434
1,035	2,032	0,0712	0,8903	0,7644	0,6425	0,5322	0,4363
1,036	2,018	0,0733	0,8881	0,7603	0,6370	0,5261	0,4301
1,037	2,004	0,0754	0,8860	0,7562	0,6316	0,5199	0,4236
1,038	1,991	0,0774	0,8838	0,7522	0,6261	0,5135	0,41665
1,039	1,978	0,0795	0,8817	0,7483	0,6211	0,5079	0,4110
1,040	1,966	0,0816	0,8796	0,7444	0,6159	0,5021	0,4050
1,041	1,954	0,0837	0,8775	0,7404	0,6107	0,4962	0,3987
1,042	1,942	0,0858	0,8755	0,7367	0,6058	0,4906	0,3929
1,043	1,931	0,0879	0,8734	0,7329	0,6009	0,4852	0,3875
1,044	1,919	0,0899	0,8714	0,7292	0,5961	0,4798	0,3819
1,045	1,909	0,0920	0,8694	0,7256	0,5916	0,4751	0,3776
1,046	1,897	0,0941	0,8674	0,7220	0,5868	0,4696	0,3717
1,047	1,887	0,0962	0,8655	0,7184	0,5822	0,4645	0,3665
1,048	1,877	0,0983	0,8635	0,7148	0,5775	0,4591	0,3596
1,049	1,867	0,1004	0,8616	0,7115	0,5734	0,4549	0,3569
1,050	1,857	0,1025	0,8597	0,7081	0,5691	0,4502	0,3522

zunächst voraussetzen, braucht man also die Werte von $\bar{Q}$ nur etwa für einen Bereich von $\zeta = 1$ bis $\zeta = 1{,}05$. Wir haben daher in der beigegebenen Tabelle die entsprechenden Werte der fünf ersten $\bar{Q}$-Funktionen für Argumente dieses Bereichs bei einem Intervall von 0,001 zusammengestellt (vgl. Abb. 1, 2 u. Tab. 1). Die Werte der Funktionen haben den Anfangswert $\bar{Q}(1) = 1$ für $\zeta = 1$ gemeinsam und fallen dann mit wachsendem ζ asymptotisch auf den Wert

Null und zwar um so schneller, je höher die Ordnungszahl ist. Für größere Werte, etwa für $\zeta > 2$ erweist sich die Rechnung z. B. nach den Tabellen von *Hayashi* als unzweckmäßig. Man verwendet dann am besten folgende Reihenentwickelungen, die sich aus der Reihe

$$\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1} = \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{3\,\zeta^3} + \frac{1}{5\,\zeta^5} + \cdots$$

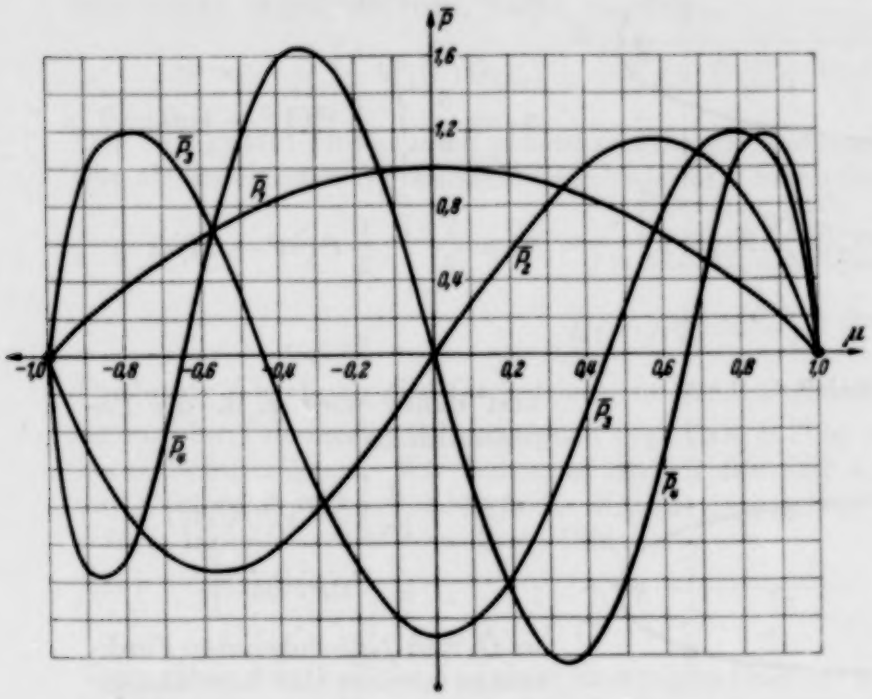

Abb. 1. Die $\bar{P}$-Funktionen.

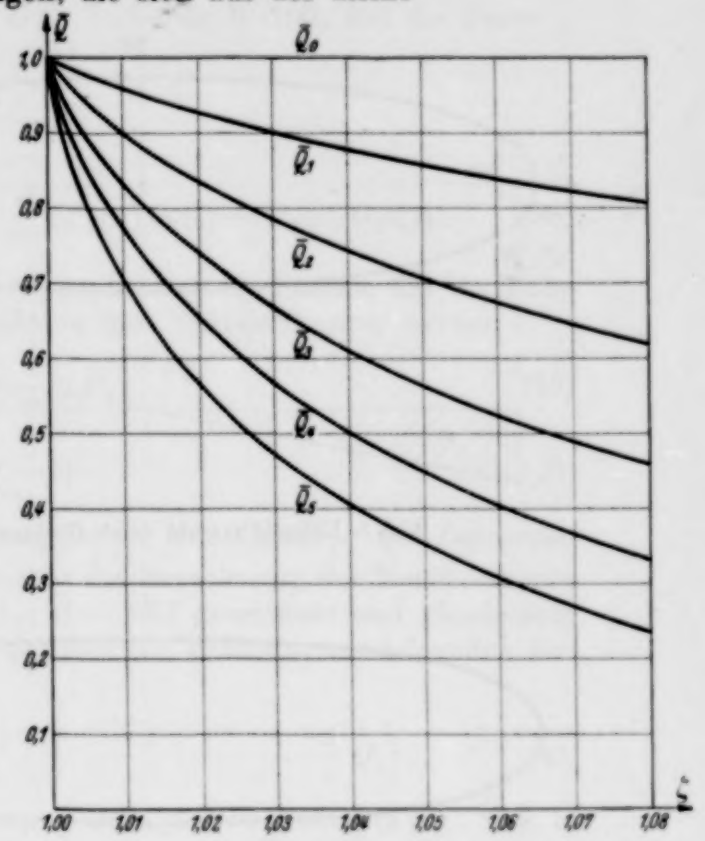

Abb. 2. Die $\bar{Q}$-Funktionen.

ableiten lassen. So erhält man auf Grund der gegebenen Rekursionsformel:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{Q}_1 &= 2\left(\frac{1}{1\cdot 3\,\zeta} + \frac{1}{3\cdot 5\,\zeta^3} + \frac{1}{5\cdot 7\,\zeta^5} + \cdots\right),\\
\bar{Q}_2 &= 2\cdot 3\left(\frac{1}{3\cdot 5\,\zeta^2} + \frac{1}{5\cdot 7\,\zeta^4} + \frac{1}{7\cdot 9\,\zeta^6} + \cdots\right),\\
\bar{Q}_3 &= 2\cdot 3\cdot 4\left(\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\,\zeta^3} + \frac{2}{5\cdot 7\cdot 9\,\zeta^5} + \frac{3}{7\cdot 9\cdot 11\,\zeta^7} + \cdots\right).
\end{aligned}\right| \qquad (30)$$

II. Besondere Rotationskörper.

6. Betrachtung einiger Beispiele. a) Fall des linearen Quellsenkenkeils. Setzen wir $f(t) = t\,(-1 < t < +1)$ so erhalten wir, da $P_1(t) = t$ ist, als einzigen Koeffizienten $\alpha_1 = 1$. Es ergibt sich daher

$$\Phi = -\frac{A}{2\pi}P_1(\mu)Q_1(\zeta) = -\frac{A}{2\pi}\mu\left(\frac{1}{2}\,\zeta\lg\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - 1\right), \qquad (31)$$

$$\Psi = \frac{A}{4\pi}\bar{P}_1(\mu)\bar{Q}_1(\zeta) = \frac{A}{4\pi}(1-\mu^2)\left[\zeta - \frac{1}{2}\,(\zeta^2-1)\lg\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right]. \qquad (32)$$

Aus der Gleichung der Kontur

$$\frac{A}{2\pi\,v_1}\bar{Q}_1(\zeta) = \zeta^2 - 1 \qquad (33)$$

folgt $\zeta = \text{konst} = \zeta_0$, also eine Ellipse und für die Konstante

$$\frac{A}{2\pi\,v_1} = \frac{\zeta_0^2-1}{\bar{Q}_1(\zeta_0)}\;; \qquad (34)$$

der in Abb. 3 dargestellte Fall entspricht dem Wert $\zeta_0 = 1{,}029$. Auch die anderen Größen, z. B. die Geschwindigkeiten lassen sich in einfachster Weise berechnen.

b) Fall des kubischen Quellsenkenkeils. Eine mit dem Rotationsellipsoid verwandte Form, das sog. Ovaloid läßt sich aus dem Ansatz $f(t) = t^3$ ableiten. Benutzt man die drei ein-

fachen Kugelfunktionen

$$P_1 = t, \qquad P_2 = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \qquad P_3 = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t),$$

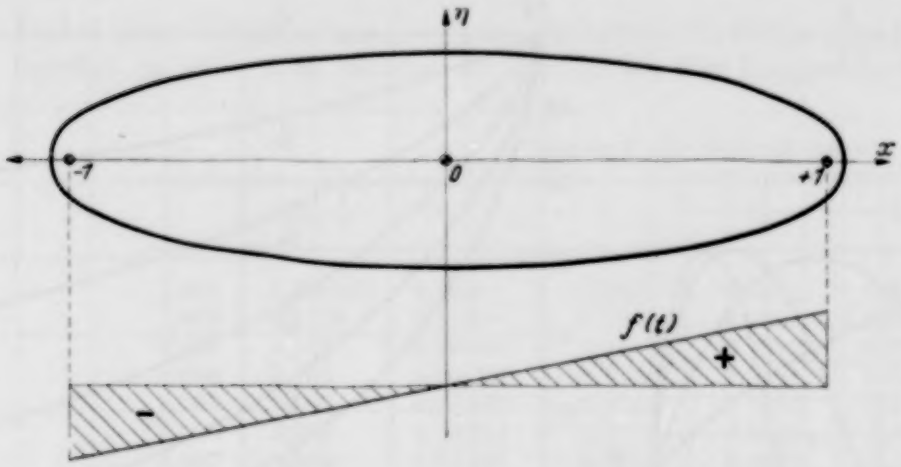

Abb. 3. Ellipsoid erzeugt durch Quellsenkenkeil. $\zeta_0 = 1{,}029$.

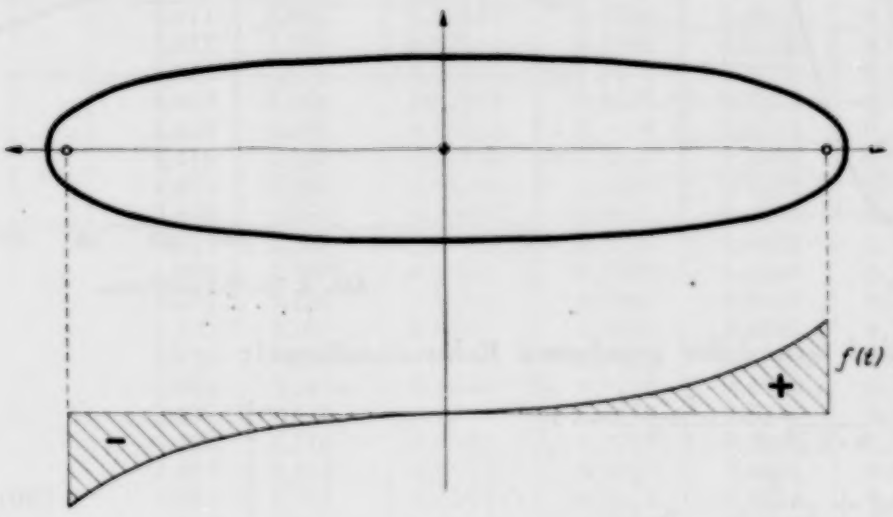

Abb. 4. Ovaloid R_2: Kubischer Quellsenkenkeil; $\frac{\pi v_1}{A} = 4{,}05$.

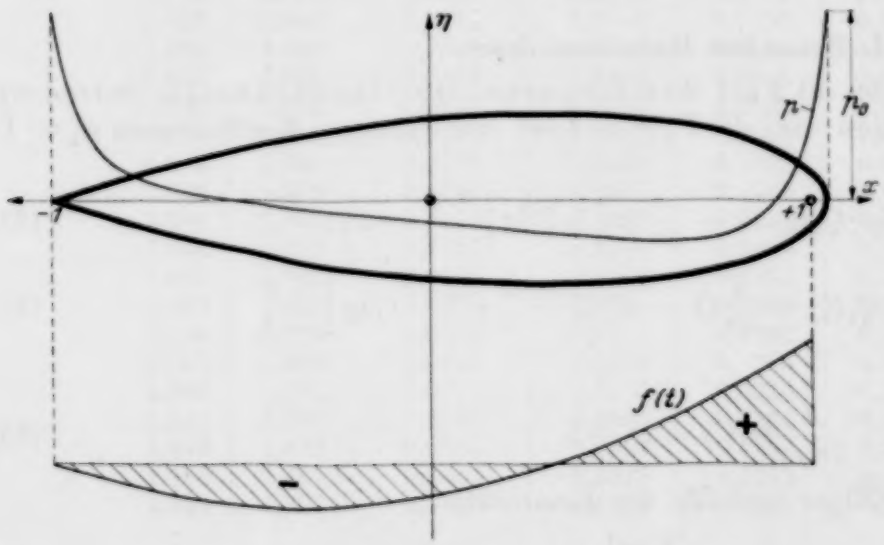

Abb. 5. R_1: Quadrat. Quellsenkenverteilung mit $\frac{\pi v_1}{A} = 5{,}56$.

so ergibt sich ohne weiteres

$$\alpha_1 = \int_{-1}^{+1} t^4\,dt = \frac{3}{5},$$

$$\alpha_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} t^3(3t^2 - t)\,dt = 0,$$

$$\alpha_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} t^3(5t^3 - 3t)\,dt = \frac{2}{5},$$

und daher wird z. B. die Potentialfunktion

$$\Phi = -\frac{A}{2\pi}\left[\frac{3}{5} P_1(\mu) Q_1(\zeta) + \frac{2}{5} P_3(\mu) Q_3(\zeta)\right], \qquad (35)$$

wo Q_1 und Q_3 die folgenden Funktionen zweiter Art bezeichnen:

$$Q_1(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta \lg\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - 1,$$

$$Q_3(\zeta) = \frac{1}{4}(5\zeta^3 - 3\zeta)\lg\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{5}{2}\zeta^2 + \frac{2}{3}.$$

Die Stromfunktion wird dagegen

$$\Psi = \frac{A}{4\pi}\left[\frac{3}{5}\bar{P}_1(\mu)\bar{Q}_1(\zeta) + \frac{1}{15}\bar{P}_3(\mu)\bar{Q}_3(\zeta)\right], \qquad (36)$$

wo

$$\bar{P}_1 = 1 - \mu^2;$$

$$\bar{P}_3 = \frac{3}{2}(5\mu^2 - 1)(1 - \mu^2),$$

$$\bar{Q}_1 = \zeta - \frac{1}{2}(\zeta^2 - 1)\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1};$$

$$\bar{Q}_3 = \frac{3}{2}(5\zeta^2 - 1)\bar{Q}_1 - 5\zeta.$$

Als Gleichung der Meridiankontur erhalten wir

$$\bar{Q}_1 + \frac{1}{6}(5\mu^2 - 1)\bar{Q}_3 = \frac{10}{3}\frac{\pi v_1}{A}(\zeta^2 - 1). \qquad (37)$$

Das gibt für jedes ζ eine rein quadratische Gleichung für μ, aus der dann zusammengehörige Werte zu bestimmen sind. Wie die Abb. 4 zeigt, in der der Fall $\pi v_1/A = 4{,}05$ dargestellt ist, unterscheidet sich das Ovaloid vom Ellipsoid durch eine flachere Entwickelung des mittleren

Teiles und eine kugelartige Krümmung der beiden Scheitel. Die Berechnung der Geschwindigkeiten bietet keine Schwierigkeiten.

c) Quadratische Verteilungsfunktion. Die einzige Funktion dieser Art, die der Schließungsbedingung genügt und zugleich in $t=-1$ eine Nullstelle besitzt, hat die Form

$$f(t)=(t+1)\left(t-\frac{1}{3}\right).$$

Man erhält dann, wie man leicht bestätigt,

$$\Phi=-\frac{A}{4\pi}\left[\frac{4}{3}P_1(\mu)\,Q_1(\zeta)+\frac{4}{3}P_2(\mu)\,Q_2(\zeta)\right]=-\frac{A}{3\pi}\left[P_1(\mu)\,Q_1(\zeta)+P_2(\mu)\,Q_2(\zeta)\right]. \tag{38}$$

Der Fall gehört zu der oben gekennzeichneten Formengruppe, bei der die Summe der α_ν-Reihe mit alternierenden Vorzeichen verschwindet. Stromfunktion und Meridiankontur werden

$$\Psi=\frac{A}{2\pi}(1-\mu^2)\left(\frac{1}{3}\bar{Q}_1+\frac{1}{3}\mu\bar{Q}_2\right), \tag{39}$$

$$\bar{Q}_1+\mu\bar{Q}_2=\frac{3\pi v_1}{A}(\zeta^2-1). \tag{40}$$

Die letzte Gleichung gibt für jedes ζ eine lineare Gleichung für die Koordinate μ. Bei Zugrundelegung der Tabelle der $\bar{Q}$-Funktionen (vgl. Tab S. 286) macht die Berechnung der Meridiankurve keine Schwierigkeit. Wir haben in Abb. 5 den Fall πv_1: $A=6{,}67$ gezeichnet und gleichzeitig den Verlauf des Druckes längs der Kontur angegeben, der sich wie bekannt, aus folgenden Geschwindigkeitswerten berechnen läßt:

$$\frac{v_x'}{v_1}=-\frac{A}{3\pi v_1}\,\frac{1-\mu^2}{(\zeta^2-1)(\zeta-\mu)},\qquad \frac{v_\eta'}{v_1}=\frac{A}{3\pi v_1}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta^2-1}}\left(\frac{1}{\zeta-\mu}-\frac{3}{2}\bar{Q}_1\right). \tag{41}$$

Gegenüber dem Fall des aus einer unstetigen Quellverteilung erzeugten Drehkörpers (vgl. Abb. 12 bis 14) fällt vor allem auf, daß im vorliegenden Beispiel der stetigen quadratischen Quellverteilung der Druck im mittleren Gebiet des Körpers einen sehr gleichmäßigen Verlauf zeigt und von dem vorderen Minimum aus fast linear bis in die Nähe des hinteren Endes ansteigt.

7. Stetige Quellsenkenverteilung dritten und höheren Grades. Indem wir an der Voraussetzung, daß der linke Endpunkt der Grundstrecke ein Nullpunkt der Verteilungsfunktion ist, festhalten, wollen wir folgende Form:

$$f(t)=c_0(t+1)^n+c_1(t+1)^{n-1}+\cdots-c_{n-1}(t+1)\qquad(c_0=\pm 1) \tag{42}$$

zu Grunde legen. Dann ergibt die Schließungsbedingung (3) die Beziehung zwischen den Koeffizienten

$$c_{n-1}=\frac{c_0}{n+1}2^n+\frac{c_1}{n}2^{n-1}+\cdots+\frac{4}{3}c_{n-2}. \tag{43}$$

Für $n=3$ wird z. B.

$$c_2=2c_0+\frac{4}{3}c_1; \tag{43a}$$

für $n=4$ wird

$$c_3=\frac{32}{5}c_0+\frac{3}{4}c_1+\frac{4}{3}c_2. \tag{43b}$$

Die Bestimmung der Koeffizienten α_ν, sowie die Aufstellung der für die Strömung maßgebenden Funktionen ist dann nach den gegebenen Vorschriften leicht durchzuführen, und wir können uns darauf beschränken, die Ergebnisse der Rechnung mitzuteilen. Stellen wir zunächst die Koeffizienten α_ν in der Entwickelung der Funktion $(t+1)^m$ für $m=1$ bis $m=7$ nach Kugelfunktionen tabellarisch zusammen, so erhalten wir vorstehendes leicht verständliche Schema.

Tabelle II für die Koeffizienten α_ν.

m	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
1	1	1	—	—	—	—	—	—
2	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{2}{3}$	—	—	—	—	—
3	2	$\frac{18}{5}$	2	$\frac{2}{5}$	—	—	—	—
4	$\frac{16}{5}$	$\frac{32}{5}$	$\frac{32}{7}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{35}$	—	—	—
5	$\frac{16}{3}$	$\frac{80}{7}$	$\frac{200}{21}$	$\frac{40}{9}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{63}$	—	—
6	$\frac{64}{7}$	$\frac{144}{7}$	$\frac{400}{21}$	$\frac{32}{3}$	$\frac{288}{77}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{16}{231}$	—
7	16	$\frac{112}{3}$	$\frac{112}{3}$	$\frac{784}{33}$	$\frac{112}{11}$	$\frac{112}{39}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{16}{429}$

Damit ergibt sich z. B. für den Fall der kubischen Verteilung nach (36) und (38)

$$\Phi = -\frac{A}{\pi}\left[\left(\frac{4}{5}c_0+\frac{1}{3}c_1\right)P_1(\mu)Q_1(\zeta)+\left(c_0+\frac{1}{3}c_1\right)P_2(\mu)Q_2(\zeta)+\frac{1}{5}c_0P_3(\mu)Q_3(\zeta)\right] \tag{44}$$

und als Gleichung der Meridiankontur die in μ quadratische Gleichung

$$\frac{1}{2}\bar{Q}_3\mu^2+2\left(c_0+\frac{c_1}{3}\right)\bar{Q}_2\mu+\left(\frac{7}{4}c_0+\frac{2}{3}c_1\right)\bar{Q}_1-\frac{1}{4}\zeta\bar{Q}_2=\frac{2\pi v_1}{A}(\zeta^2-1)\,. \tag{45}$$

Die Komponenten der Relativgeschwindigkeiten werden

$$\left.\begin{aligned}\frac{v'_x}{v_1}&=\frac{A}{4\pi v_1}\frac{1-\mu^2}{(\zeta^2-1)}\left[\frac{c_0}{2}(3\bar{Q}_1-\zeta\bar{Q}_2)-\frac{4\left(c_0+\frac{c_1}{3}\right)}{\zeta-\mu}\right],\\ \frac{v'_\eta}{v_1}&=-\frac{A}{2\pi v_1}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta^2-1}}\left[c_0\mu\bar{Q}_2+\left(c_0+\frac{c_1}{3}\right)\frac{(\bar{Q}_2-3\,\mu\bar{Q}_1)}{\zeta-\mu}\right].\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Bei gegebenem Streckungsverhältnis, d.h. bei gegebener Konstante $\pi v_1/A$ gibt es eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Formen R_3 bei kubischer Quellverteilung. Wir haben in Abb. 6, 7, 8 drei Formen und zwar die Fälle $c_0=-1$, $c_1=3$, $c_0=1$, $c_1=-3/2$, $c_0=1$, $c_1=0$ dargestellt, die sich vor allem durch die Lage der Wurzeln von $f(t)=0$ unterscheiden. Die zu $c_1=3$ $(c_0=-1)$ gehörende Meridiankurve hat eine in bezug auf die x- und η-Achse symmetrische linsenartige Gestalt, die Nullstellen liegen in den Endpunkten und in der Mitte der Grundstrecke. Im Falle $c_0=1$, $c_1=-3/2$ mit einer Doppelwurzel in $t=-1$ und einer einfachen Wurzel in $t=1/2$ entsteht eine Spitze am hinteren Ende des Rotationskörpers mit achsialer Tangente. Die Kontur $c_1=0$, bei der die erzeugende Verteilungsfunktion außer $t=-1$ nur eine Nullstelle auf der Grundstrecke in $t=\sqrt{2}-1$ aufweist, ist die gleichmäßigste Form mit abgerundetem Vorderteil; die Druckverteilung ist vergleichbar mit der oben gekennzeichneten Druckkurve für den aus der quadratischen Quellverteilung abgeleiteten Rotationskörper.

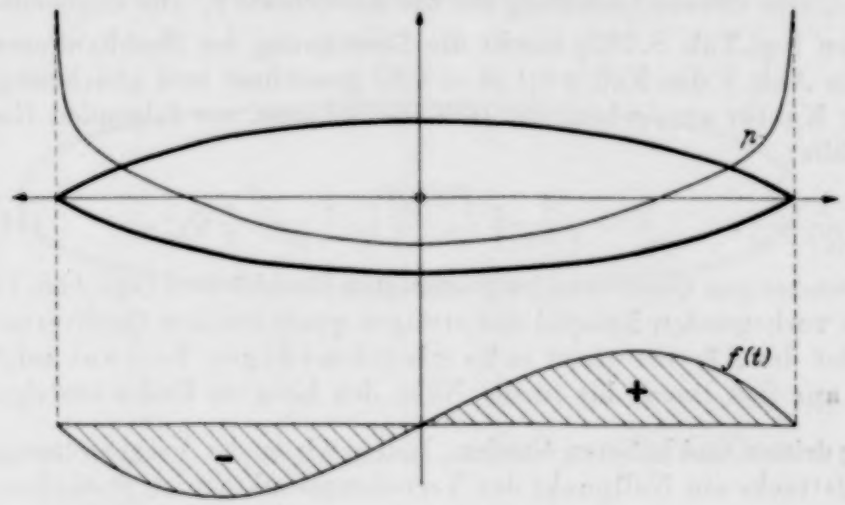

Abb. 6. R_3: $c_0=-1$; $c_1=3$; $\frac{\pi v_1}{A}=5{,}56$.

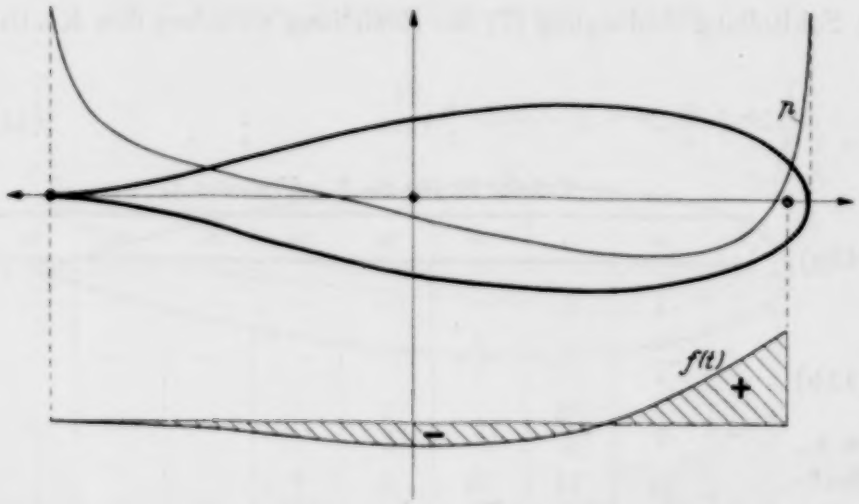

Abb. 7. R_3: $c_0=1$; $c_1=-\frac{3}{2}$; $\frac{\pi v_1}{A}=6$.

In derselben Weise lassen sich die charakteristischen Funktionen für die biquadratischen Quellsenkenverteilung aufstellen. Die Potentialfunktion wird mit der Schließungsbedingung (43b)

$$\left.\begin{aligned}\Phi=-\frac{A}{\pi}\Big[&\left(\frac{8}{5}c_0+\frac{4}{5}c_1+\frac{1}{3}c_2\right)P_1(\mu)\,Q_1(\zeta)+\left(\frac{16}{7}c_0+c_1+\frac{1}{3}c_2\right)P_2(\mu)\,Q_2(\zeta)\\ &+\left(\frac{4}{5}c_0+\frac{1}{5}c_1\right)P_3(\mu)\,Q_3(\zeta)+\frac{4}{35}c_0P_4(\mu)\,Q_4(\zeta)\Big]\,.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Die Gleichung der Meridiankontur wird

$$\left(\frac{4}{5}c_0+\frac{2}{5}c_1+\frac{1}{6}c_2\right)\overline{Q}_1+\left(\frac{8}{7}c_0+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{6}c_2\right)\mu\overline{Q}_2 + \frac{1}{8}\left(\frac{4}{5}c_0+\frac{1}{5}c_1\right)(5\mu^2-1)\overline{Q}_3+\frac{1}{30}c_0\mu\,(7\mu^2-3)\overline{Q}_4=\frac{\pi v_1}{A}(\zeta^2-1)\,. \tag{48}$$

Sie gibt für jeden Wert von ζ eine kubische Gleichung zur Bestimmung der Koordinate μ.

Die Relativgeschwindigkeiten werden bei Reduktion der Ausdrücke mit $c_0=1$

$$\frac{v_x'}{v_1}=\frac{A}{4\pi v_1}\frac{1-\mu^2}{\zeta^2-1}\left[\frac{4}{5}\mu+6\,\overline{Q}_1-2\,\overline{Q}_2(\zeta-\mu+\mu\zeta^2)-\frac{4}{\zeta-\mu}\left(\frac{12}{5}+c_1+\frac{1}{3}c_2\right)+\frac{c_1}{2}(3\overline{Q}_1-\zeta\overline{Q}_2)\right],$$

$$\frac{v_\eta}{v_1}=\frac{A}{4\pi v_1}\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\zeta^2-1}}\left[-\overline{Q}_2(5\zeta\eta^2-\zeta+8\mu)-3\,\overline{Q}_1(5-\mu^2)+\frac{4}{\zeta-\mu}\left(\frac{12}{5}+c_1+\frac{1}{3}c_2\right)-2\,c_1(3\,\overline{Q}_1+\mu\overline{Q}_2)-2\,c_2Q_1\right]. \tag{49}$$

Es gibt bei gegebener Konstante $\pi v_1/A$, von der das Streckungsverhältnis des Rotationskörpers abhängt und bei der Annahme $c_0=1$ eine zweifache unendliche Mannigfaltigkeit von Formen mit biquadratischer Quellsenkenverteilung, entsprechend den Werten der Konstanten c_1 und c_2. Dabei müssen, wie hier nicht näher ausgeführt werden kann, gewisse Bedingungen für die Lage der Wurzeln, bzw. der von ihnen begrenzten Flächen $\int f(t)\,dt$ erfüllt werden, um zu verhindern, daß der Rotationskörper in zwei oder mehrere Teile zerfällt [1].

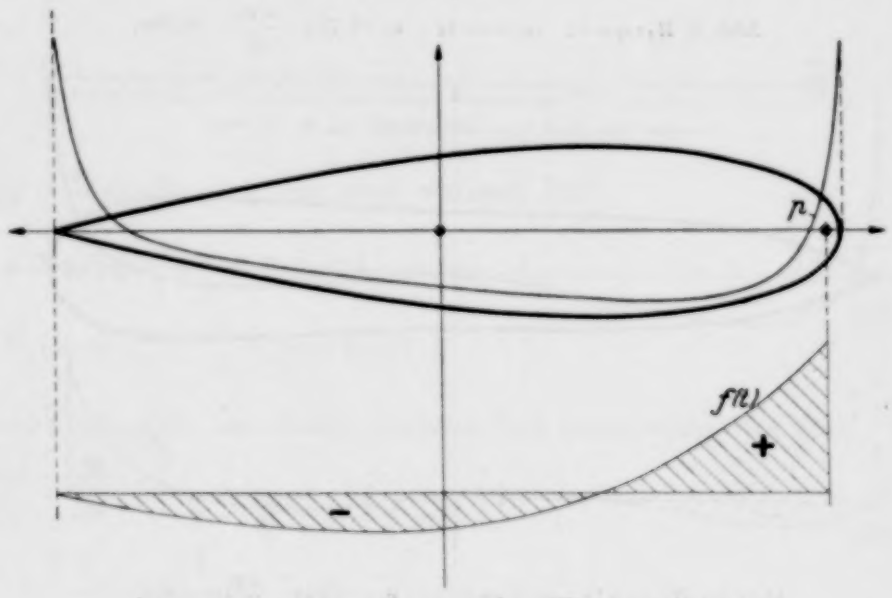

Abb. 8. R_3: $c_0=1$; $c_1=0$; $\frac{\pi v_1}{A}=16{,}7$.

Tabelle III für die R_3.

c_0	c_1	c_2	t_1	t_2	$\frac{\pi v_1}{A}$
−1	3	2	+1	0	5,56
+1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	−1	6
+1	0	2	0,414	—	16,7

Tabelle IV der R_4.

c_0	c_1	c_2	c_3	t_1	t_2	t_3	$\frac{\pi v_1}{A}$
1	−4	5,76	2,88	0,2	—	—	16,589
1	−3,5	3,84	1,32	0,69	0,1	−0,35	4,356
1	−3,7364	4,6584	0,3807	0,2454	0,2454	0,2454	7,492

Wir haben (in den Abb. 9, 10, 11) drei typische Formen mit den zugehörigen Quellverteilungen und Druckkurven dargestellt, die sich dadurch unterscheiden, daß außer der gemeinsamen Wurzel $t=-1$ nur eine reelle, drei getrennte oder schließlich drei zusammenfallende Nullstellen innerhalb der Grundstrecke liegen (vgl. Tabelle IV). Besonders deutlich tritt dabei der Einfluß der Quellverteilung auf den Druckverlauf längs der Oberfläche zutage, der sich besonders darin ausspricht, daß nur bei einer wendepunktslosen Quellkurve $f(t)$, wie im ersten Fall, die gleichmäßige Änderung der Krümmung der Meridiankurve und ein wendepunktsfreier Druckverlauf gesichert ist, während die Wendestellen von $f(t)$ entsprechende Wendepunkte des Druckverlaufs zur Folge haben. Schon bei einer geringen Einschnürung des Drehkörpers in der Mitte wird

[1] Eine 1944—45 vom Verf. und seinem verdienten Mitarbeiter, Dr. *Fr. Eser* durchgeführte Untersuchung zur „Systematik der aus einer biquadratischen Quellsenkenverteilung ableitbaren Rotationskörper" mit etwa 40 Zeichnungen ist zum größten Teil verloren gegangen.

ferner in der Nähe des hinteren Endes ein zweites Druckminimum auftreten, das meist absolut größer ist als das normale Druckminimum im vorderen Teil. Es gibt ferner nur eine ausgezeichnete flachste Meridiankurve, bei der alle drei Nullstellen in einem Punkt zusammenfallen, der dann zum Wendepunkt mit axialer Tangente wird.

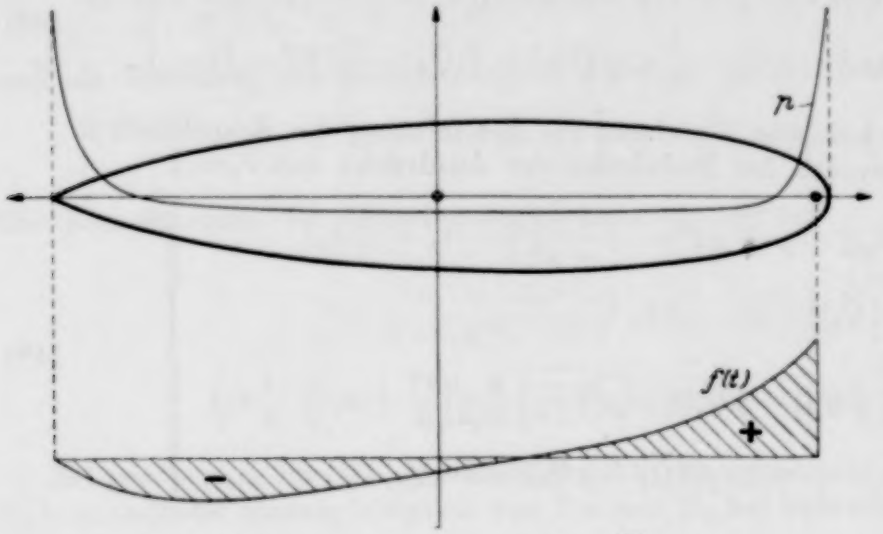

Abb. 9. $R_1: c_0 = 1$; $c_1 = -4$; $c_2 = 5{,}76$; $\frac{\pi v_1}{A} = 16{,}589$.

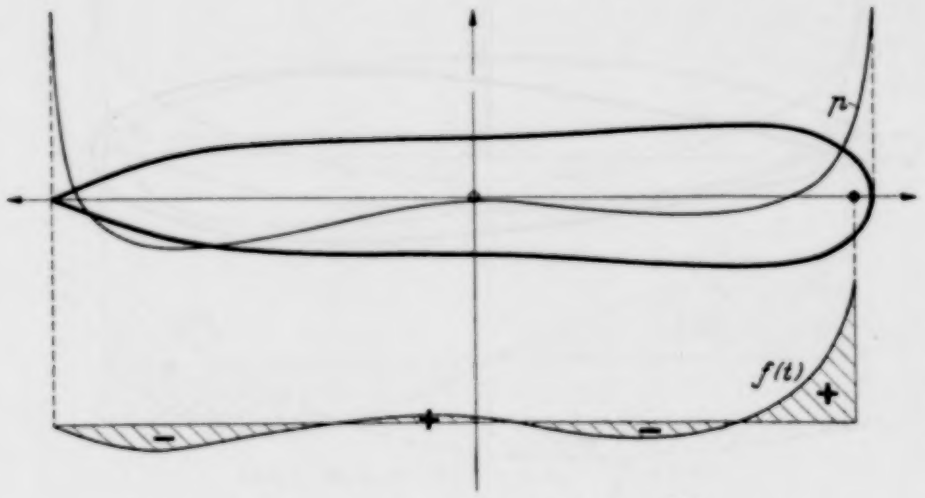

Abb. 10. $R_1: c_0 = 1$; $c_1 = -3{,}5$; $c_2 = 3{,}84$; $\frac{\pi v_1}{A} = 4{,}356$.

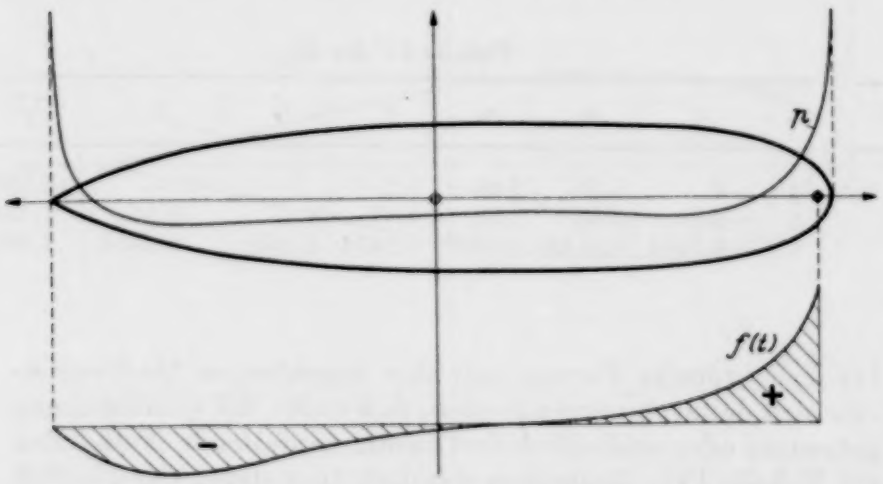

Abb. 11. $R_1: c_0 = 1$; $c_1 = -3{,}73635$; $c_2 = 4{,}65344$; $\frac{\pi v_1}{A} = 7{,}492$.

III. Unstetige Verteilung von Quellen und Senken.

8. Punktquelle und Punktsenke. Eine unstetige Verbindung mehrerer Quellelemente mit verschwindender Gesamtergiebigkeit läßt sich im allgemeinen mit Ellipsoidkoordinaten sehr einfach darstellen. Die Reihenentwickelungen mit Hilfe der Kugelfunktionen werden allerdings in diesem Falle unendlich. Der Vollständigkeit halber sollen einige einfache Beispiele besprochen werden.

Da die Radienvektoren von den beiden Endpunkten $x = \pm 1$ der Grundstrecke die Werte

$$r_1 = \zeta + \mu;\ r_2 = \zeta - \mu$$

haben, so ergibt sich für das System einer Quelle und Senke in diesen Punkten mit der Ergiebigkeit q das Potential und die Stromfunktion

$$\Phi = -\frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{\zeta - \mu} - \frac{1}{\zeta + \mu}\right) = -\frac{q\mu}{2\pi(\zeta^2 - \mu^2)}, \qquad (50a)$$

$$\Psi = \frac{q}{2\pi}\,\frac{\zeta(1 - \mu^2)}{\zeta^2 - \mu^2}. \qquad (50b)$$

Die Meridiankurve hat die Gleichung

$$\mu^2 = \zeta^2 - b^2\frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}, \qquad (51)$$

wenn $q/\pi v_1 = b^2$ gesetzt wird; b ist der Grenzradius für den „Halbkörper", den man erhält, wenn die Senke ins Unendliche rückt. Mit Hilfe der Formel (22), so wie der bekannten *Neumann*schen Darstellung

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_\nu(\mu)}{\zeta - \mu} = Q_\nu(\zeta), \qquad \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_\nu(\mu)\,d\mu}{\zeta + \mu} = (-1)^\nu Q_\nu(\zeta) \qquad (52)$$

erhält man die Reihen

$$\frac{1}{\zeta - \mu} = \sum (2\nu + 1)\,P_\nu Q_\nu, \qquad \frac{1}{\zeta + \mu} = \sum (2\nu + 1)(-1)^\nu P_\nu Q_\nu, \qquad (53)$$

also

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= -\frac{q}{2\pi}\left[3\,P_1(\mu)Q_1(\zeta)+7\,P_3(\mu)Q_3(\zeta)+\cdots\right], \\ \Psi &= \frac{q}{2\pi}\left[\frac{3}{2}\,\overline{P}_1(\mu)\overline{Q}_1(\zeta)+\frac{7}{12}\,\overline{P}_3(\mu)\overline{Q}_3(\zeta)+\cdots\right]. \end{aligned}\right| \tag{54}$$

9. Quellpunkt und Senkenstrecke. Wir nehmen eine Punktquelle in $x=1$ und eine von -1 bis $+1$ reichende Senkenstrecke an, deren Ergiebigkeiten entgegengesetzt gleich sind. In Ellipsoid-Koordinaten erhalten wir dann durch einfache Auswertung von (2) für die Senkenstrecke für das ganze System

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \\ &-\frac{q}{2\pi}\left(\frac{1}{\zeta-\mu}-\frac{1}{2}\lg\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right), \\ \Psi &= \frac{q}{4\pi}\,\frac{1-\mu^2}{\zeta-\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

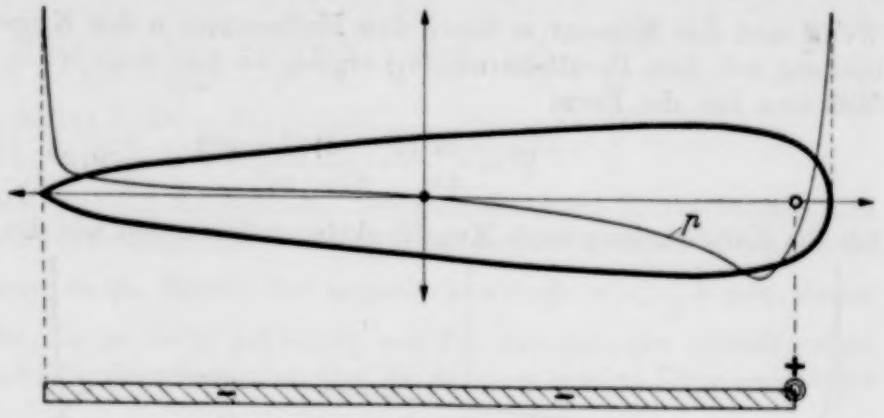

Abb. 12. R aus Quellpunkt und Senkenstrecke.

Der Meridianschnitt des Rotationskörpers erhält die Gleichung

$$\zeta-\mu=\frac{b^2}{2(\zeta^2-1)}. \tag{56}$$

Wegen $Q_0(\zeta)=\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}$, $P_0(\mu)=1$ ergibt sich aus dem vorigen Fall

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= -\frac{q}{4\pi}\left[3\,P_1(\mu)\,Q_1(\zeta)+5\,P_2(\mu)\,Q_2(\mu)+\cdots\right], \\ \Psi &= \frac{q}{4\pi}\left[\frac{3}{2}\,\overline{P}_1(\mu)\,\overline{Q}_1(\zeta)+\frac{5}{6}\,\overline{P}_2(\mu)\,\overline{Q}_2(\zeta)+\cdots\right]. \end{aligned}\right| \tag{57}$$

Die Relativkomponenten der Geschwindigkeit am Rande werden bei Benutzung von (56)

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_x'}{v_1} &= -\frac{b^2(1-\mu^2)}{4(\zeta-\mu)^2}\left[\frac{1}{\zeta-\mu}+\frac{2\,\zeta^2}{(\zeta+\mu)(\zeta^2-1)}\right], \\ \frac{v_\eta'}{v_1} &= \frac{v_\eta}{v_1} = \frac{b^2\eta}{4(\zeta-\mu)}\left[\frac{1}{(\zeta-\mu)^2}-\frac{\zeta}{(\zeta^2-1)(\zeta+\mu)}\right]. \end{aligned}\right| \tag{58}$$

In Abb. 12 ist das Beispiel $b^2=0{,}05$ mit der entsprechenden Druckverteilung längs der Oberfläche zur Darstellung gebracht.

10. Quellpunkt und linearer Senkenkeil. Wenn der Senkenkeil von -1 bis 1 reicht mit linearem Anstieg, so ergibt sich durch eine leichte Rechnung, die wir nicht ausführlich bringen wollen,

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= -\frac{q}{4\pi(\zeta-\mu)}+\frac{q}{4\pi}\left[(1+\zeta\mu)\,\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}-\mu\right] \\ &= -\frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{\zeta-\mu}-P_0(\mu)\,Q_0(\zeta)-P_1(\mu)\,Q_1(\zeta)\right] \\ &= -\frac{q}{4\pi}\left[2\,P_1(\mu)Q_1(\zeta)+5\,P_2(\mu)Q_2(\zeta)+7\,P_3(\mu)Q_3(\zeta)+11\,P_5(\mu)Q_5(\zeta)+\cdots\right], \end{aligned}\right| \tag{59}$$

$$\Psi=\frac{q}{4\pi}(1-\mu^2)\left[\frac{1}{\zeta-\mu}-\frac{1}{2}\,\overline{Q}_1\right]=\frac{q}{4\pi}\left[\overline{P}_1(\mu)\overline{Q}_1(\zeta)+\frac{5}{6}\,\overline{P}_2(\mu)Q_2(\zeta)+\frac{7}{12}\,\overline{P}_3(\mu)\overline{Q}_3(\zeta)+\cdots\right]. \tag{60}$$

Die Meridiangrenze des Rotationskörpers hat in Ellipsoidkoordinaten die einfache Gleichung

$$\mu=\zeta-\frac{2}{Q_1+\frac{4}{b^2}(\zeta^2-1)}, \tag{61}$$

die, wie man sieht, für $\zeta=1$ und $\mu=1$ erfüllt ist: am hinteren Ende entsteht wieder eine kegelartige Spitze (Abb. 13). Für die Relativgeschwindigkeitkomponenten am Rande ergeben

sich bei Benutzung von (61) die Ausdrücke

$$\frac{v_x'}{v_1} = -\frac{b^2(1-\mu^2)}{4(\zeta-\mu)^2}\left[\frac{1}{\zeta-\mu}+\frac{\zeta}{\zeta^2-1}\right], \qquad \frac{v_\eta'}{v_1} = -\frac{b^2\eta}{4(\zeta-\mu)} - \left[\frac{1}{\zeta^2-1}-\frac{1}{(\zeta-\mu)^2}\right]. \tag{62}$$

11. Einfluß eines Dipols. Man kann das Kopfende des Drehkörpers etwa dadurch abändern, daß man dem Quellsenkensystem (z. B. der Ziff. 9) einen Dipol im Punkte $t = 1$ hinzufügt, der in Richtung der positiven x-Achse orientiert ist. Ein einzelner Dipol dieser Art hat das Potential

$$\Phi = -\frac{m}{4\pi r_2^2}\cos\vartheta_2 = -\frac{m}{4\pi}\frac{(\zeta\mu-1)}{(\zeta-\mu)^3}. \tag{63}$$

Wenn man das Moment m durch den Halbmesser a der Kugel ausdrückt, die sich bei der Verbindung mit dem Parallelstrom (v_1) ergibt, so hat man $a^3 = m : 2\pi v_1$. Die zugehörige Stromfunktion hat die Form

$$\Psi = \frac{m}{4\pi}\frac{(\zeta^2-1)(1-\mu^2)}{(\zeta-\mu)^3} = \frac{1}{2}v_1 a^3 \frac{\eta^2}{(\zeta-\mu)^3}. \tag{64}$$

Für die Entwickelung nach Kugelfunktionen benutzen wir die durch Ableitung aus (52) hervorgehenden Formeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_\nu(\mu)\,d\mu}{(\zeta-\mu)^2} &= -Q_\nu'(\zeta), \\ \int_{-1}^{+1}\frac{P_\nu(\mu)\,d\mu}{(\zeta-\mu)^3} &= Q_\nu''(\zeta). \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

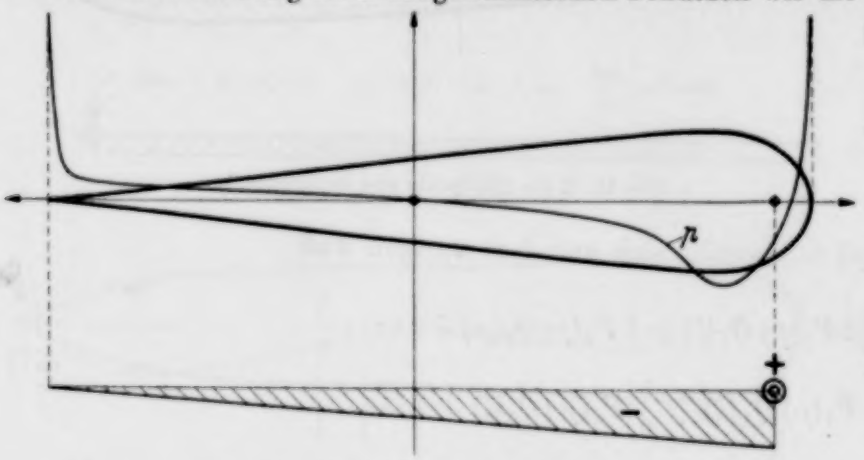

Abb. 13. R aus Quellpunkt und Senkenkeil.

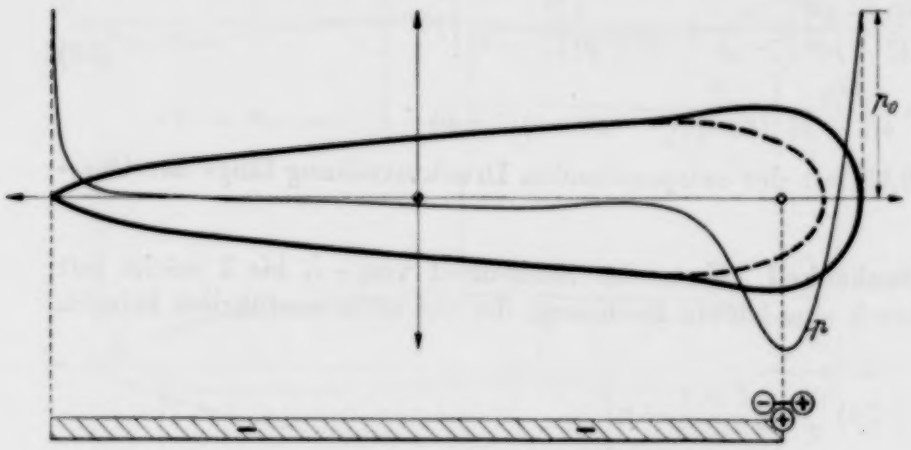

Abb. 14. R aus Quellpunkt, Senkenstrecke und Dipol.

Setzen wir

$$\frac{\zeta\mu-1}{(\zeta-\mu)^3} = \sum \alpha_\nu P_\nu(\mu)\,Q_\nu(\zeta),$$

so ergibt sich durch Multiplikation mit P_ν und Integration zwischen -1 und $+1$ nach (20)

$$\Im = \int_{-1}^{+1}\frac{(\zeta\mu-1)\,P_\nu\,d\mu}{(\zeta-\mu)^3} = -\zeta\int_{-1}^{+1}\frac{P_\nu(\mu)\,d\mu}{(\zeta-\mu)^2} + (\zeta^2-1)\int_{-1}^{+1}\frac{P_\nu(\mu)\,d\mu}{(\zeta-\mu)^3} = \frac{2\alpha_\nu}{2\nu+1}Q_\nu(\zeta),$$

also

$$\Im = 2\zeta Q_\nu' + (\zeta^2-1)Q'' = \frac{2\alpha_\nu}{2\nu+1}Q_\nu.$$

Auf Grund der bekannten Differentialgleichung für Q_ν

$$(\zeta^2-1)Q_\nu'' + 2\zeta Q_\nu' = \nu(\nu+1)Q_\nu$$

folgt daher

$$\nu(\nu+1)Q_\nu = \frac{2\alpha_\nu}{2\nu+1}Q_\nu, \quad \text{d. h.} \quad \alpha_\nu = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{2} \tag{66}$$

und damit die Potentialfunktion

$$\Phi = -\frac{3}{4}\frac{m}{\pi}\left[P_1(\mu)\,Q_1(\zeta) + 5\,P_2(\mu)\,Q_2(\zeta) + 14\,P_3(\mu)\,Q_3(\zeta) + \cdots\right]. \tag{67}$$

Wenn man nun diesen Dipol dem in Ziff. 9 behandelten System (Quellpunkt und Senkenstrecke) hinzufügt, so wird der vordere Scheitel, bzw. Staupunkt weiter nach vorne verlegt und gleichzeitig eine Vergrößerung oder Aufblähung des Kopfes bewirkt, während ein entgegengesetzter Dipol eine Rückverlegung des Staupunktes und eine Einziehung des Kopfes zur Folge hat. Wenn man die Gleichung der Kontur

$$\zeta^2 - 1 = \frac{1}{2}\, b^2 : \left[\zeta - \mu - \frac{a^3}{(\zeta-\mu)^2}\right] \tag{68}$$

benutzt und a^3 eliminiert, so entstehen für die Komponenten der Relativgeschwindigkeit längs des Randes folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_x'}{v_1} &= \frac{1-\mu^2}{2(\zeta-\mu)^2}\left\{\frac{b^2[\zeta(\zeta\mu-1)+\mu(\zeta^2-1)]}{(\zeta^2-1)(\zeta^2-\eta^2)} - 3(\zeta^2-1)\right\}, \\ \frac{v_\eta'}{v_1} &= \frac{\eta}{2(\zeta-\mu)^2}\left\{\frac{b^2[\zeta(1-\mu^2)+\mu(1-\zeta\mu)]}{(\zeta^2-1)(\zeta^2-\mu^2)} + 3(\zeta\mu-1)\right\}. \end{aligned}\right| \tag{69}$$

In Abb. 14 ist der Fall $b^2 = 0{,}05$, $a = 0{,}2$ dargestellt. Die unterbrochene Kurve bezieht sich auf den Fall ohne Dipol. Die Druckkurve zeigt ein ziemlich stark hervortretendes Minimum im vorderen Teil ein schwaches Minimum in der Mitte. Bei negativem a muß $|a| < \frac{1}{2} b$ sein, damit die Kontur vorne geschlossen bleibt. Es ist nicht schwierig, aus den angegebenen Grundformeln weitere Verbindungen von Quell- und Senkenelementen und die entsprechenden Rotationskörper zu konstruieren[1].

12. Schlußbemerkung. Die weitere Aufgabe wird darin bestehen, die Querbewegung des Rotationskörpers senkrecht zur Längsachse, die sich aus einer Verteilung von quergestellten Dipolen erzeugen läßt, sowie die entsprechenden Feldgrößen rechnerisch darzustellen. Auch dieser Fall läßt sich, wie man zeigen kann, mit Hilfe von Ellipsoidkoordinaten und Kugelfunktionen ebenso übersichtlich und gleichmäßig behandeln wie der Fall der Längsbewegung. Dabei tritt dann vor allem das bisher nicht allgemein gelöste Hauptproblem hervor, das darin besteht, die Beziehung zwischen der Quellsenkenverteilung der Längsbewegung und der Dipolverteilung der Seitenbewegung aufzufinden, die demselben Rotationskörper zugeordnet sind. Die Lösung dieses Problems ist entscheidend für die Erfassung der allgemeinen zusammengesetzten Bewegung. Es läßt sich ferner aus der neuen Darstellung ein praktisches und sehr weitreichendes Verfahren ableiten, welches bei Zugrundelegung genügend genauer Tabellen für die Kugelfunktionen, gestattet, die allgemeine Bewegung schief zur Achsenrichtung, bzw. die zugehörige Strömung und Druckverteilung, sowie auch das dabei entstehende Kräftesystem für einen rechnerisch oder graphisch vorgegebenen Rotationskörper mit beliebiger Genauigkeit zu entwickeln. Ich hoffe, in einer weiteren Mitteilung zu diesen Fragen ausführlich Stellung zu nehmen und die Durchrechnung eines Sonderfalles vorführen zu können.

(Eingegangen am 1. Februar 1951.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *W. Müller*, München 22, Museumstr. 1.

[1] Für die Anfertigung der Zeichnungen bin ich Herrn Dipl.-Ing. F. Hadwig zu Dank verpflichtet.

Die ausgebildete Kanalströmung in einem rotierenden System.

Von H. Ludwieg.

1. Einleitung. In Strömungsmaschinen treten an den Wänden von umlaufenden Teilen durch den Einfluß von Zentrifugal- und Corioliskräften recht komplizierte Strömungen auf, die für den Wirkungsgrad der Maschinen von großer Bedeutung sind. Für den einfachen Fall der umlaufenden Scheibe sind die an der Scheibe auftretenden Grenzschichtströmungen mehrfach behandelt. Auch die Grenzschicht am Blatt eines umlaufenden Propellers wurde in einer experimentellen Arbeit von *Himmelskamp*[1] untersucht. Hier soll nun der Fall einer Kanalströmung in einem rotierenden System untersucht werden, wobei wir uns auf den Fall der „ausgebildeten Kanalströmung" beschränken wollen. Unter ausgebildeter Strömung verstehen wir dabei den Strömungszustand, der sich in einem Kanal oder Rohr konstanten Querschnittes nach einer gewissen Anlaufstrecke einstellt, und der sich dann beim Fortschreiten in Kanalrichtung nicht mehr ändert. Es wird sich dabei zeigen, daß der Reibungswiderstand und damit der Druckabfall in einem Kanal in einem rotierenden System sich ganz erheblich von den Werten unterscheidet, die für die Kanalströmung im ruhenden System bekannt sind. Druckabfallmessungen in einem rotierenden doppelt U-förmigen Rohr wurden von *W. Seelig*[2] ausgeführt. Doch lassen sich diese Messungen nicht mit den unsrigen vergleichen, da hier die Strömungsverluste im wesentlichen durch die Umlenkungen hervorgerufen werden und weniger durch die Wandreibung der ausgebildeten Strömung. Im folgenden soll nun die laminare Strömung in einem rotierenden ring- bzw. schraubenförmigen Kanal zunächst theoretisch untersucht werden. Die Ergebnisse sollen dann an Hand von Druckabfallmessungen in einem rotierenden schraubenförmigen Kanal geprüft werden. Außerdem sollen die Messungen darüber Aufschluß geben, bis zu welchen *Re*-Zahlen sich die unter Annahme laminarer Strömung abgeleiteten Ergebnisse anwenden lassen, und wie sich der Druckabfall im turbulenten Bereich verhält.

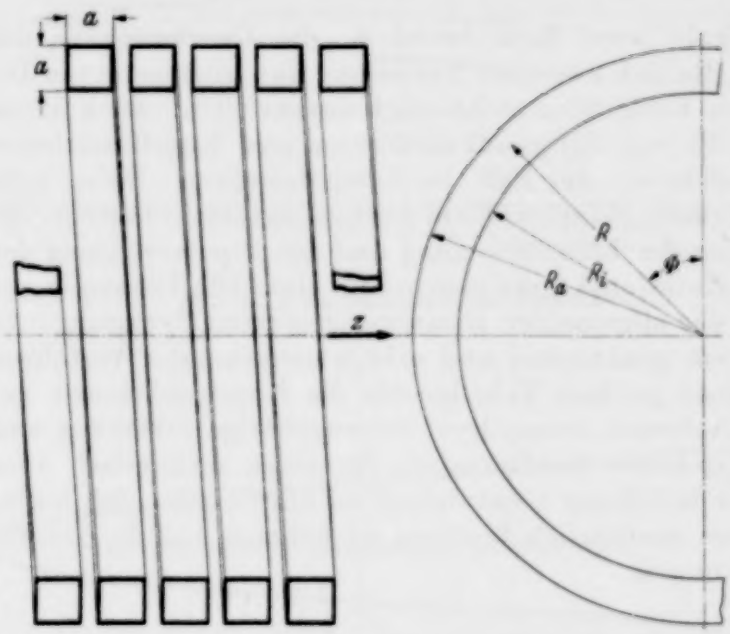

Abb. 1. Schraubenförmiger Kanal.

2. Theoretischer Teil. a) Grundgleichungen. Wir wollen die Strömung in einem rotierenden, quadratischen Schraubenkanal, wie ihn die Abb. 1 zeigt, untersuchen. Der schraubenförmige Kanal soll dabei um die Schraubenachse rotieren, während das strömende Medium längs des Schraubenkanals entweder gleichsinnig oder gegensinnig zur Rotation strömt.

Da die Steigung des Kanales nur gering sein soll, können wir ihren Einfluß bei der Rechnung ganz vernachlässigen und einfach die Strömung in einem um seine Symmetrieachse rotierenden Kreisring, wie ihn die Abb. 2 zeigt, betrachten. Wir führen Zylinderkoordinaten R, Φ, Z ein. Die Winkelgeschwindigkeit bezeichnen wir mit ω. Für eine stationäre, inkompressible Bewegung in einem mit dem Ring- bzw. Schraubenkanal rotierenden Bezugssystem lauten die *Navier-Stokes*schen Differentialgleichungen dann

$$V_R \frac{\partial V_R}{\partial R} + V_Z \frac{\partial V_R}{\partial Z} - \frac{V_\Phi^2}{R} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial R} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_R}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial V_R}{\partial R} - \frac{V_R}{R^2} + \frac{\partial^2 V_R}{\partial Z^2}\right) + \omega^2 R + 2\,\omega\, V_\Phi, \quad \text{(1a)}$$

[1] *H. Himmelskamp*, Profiluntersuchungen an einem umlaufenden Propeller. Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung. Nr. 2 (1950).

[2] *W. Seelig*, Über das Phänomen der Rotationsturbulenz in rotierenden Rohren und Kanälen. Verh. d. 3. Int. Kongr. f. tech. Mech. Stockholm, I S. 102.

$$V_R\frac{\partial V_\Phi}{\partial r}+V_Z\frac{\partial V_\Phi}{\partial Z}+\frac{V_R\cdot V_\Phi}{R}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{R\partial\Phi}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_\Phi}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial V_\Phi}{\partial R}-\frac{V_\Phi}{R^2}+\frac{\partial^2 V_\Phi}{\partial Z^2}\right)-2\,\omega\,V_R\,, \tag{1b}$$

$$V_R\frac{\partial V_Z}{\partial R}+V_Z\frac{\partial V_Z}{\partial Z}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial Z}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_Z}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial V_Z}{\partial R}+\frac{\partial^2 V_Z}{\partial Z^2}\right), \tag{1c}$$

$$\frac{\partial V_R}{\partial R}+\frac{V_R}{R}+\frac{\partial V_Z}{\partial Z}=0\,. \tag{1d}$$

Dabei sind V_R, V_Φ, V_Z die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit in Richtung von R, Φ und Z. Die Größe P ist der Druck und ϱ die Dichte und ν die kinematische Zähigkeit des Mediums. Alle Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten nach Φ sind hierbei gleich fortgelassen, da wir ja die ausgebildete Strömung betrachten wollen, bei der sich in Richtung von Φ nichts mehr ändert. Aus Gl. (1a) erkennen wir, daß das Zentrifugalglied $\omega^2 R$ keinen Einfluß auf das Strömungsbild hat; denn wir brauchen in Gl. (1a) nur statt des Druckes P einen Druck

$$P'=P-\tfrac{1}{2}\,\varrho\,\omega^2 R^2$$

einzuführen und das Glied $\omega^2 R$ fällt fort. Physikalisch bedeutet dies, daß das Kraftfeld $\omega^2 R$ ein Potential besitzt und daher einfach durch einen Druckgradienten kompensiert wird, so daß kein Einfluß auf das Strömungsfeld besteht. Den Mittelwert der Geschwindigkeit V_Φ über den Kanalquerschnitt bezeichnen wir mit V, die Seitenlänge des quadratischen Kanalquerschnittes mit a und führen dann die folgenden dimensionslosen Größen ein:

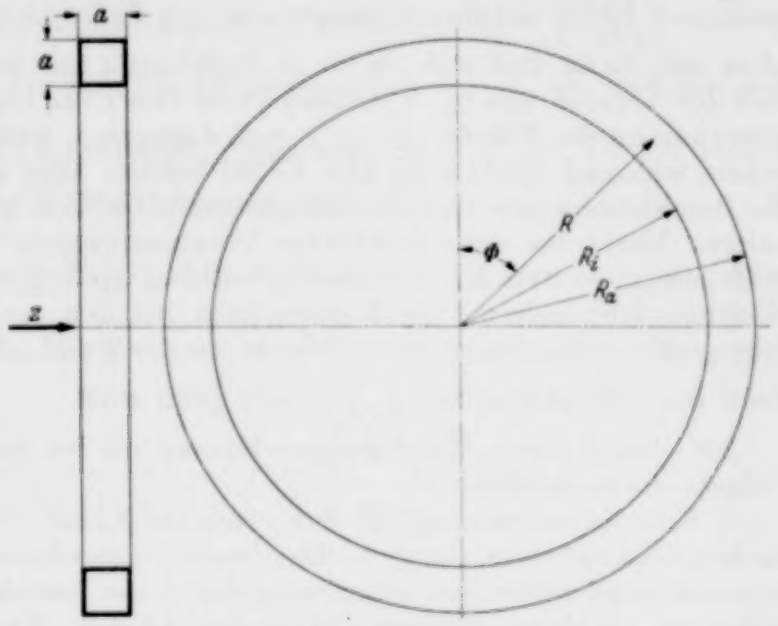

Abb. 2. Ringkanal.

$$\frac{V_R}{V}=v_r,\quad \frac{V_\Phi}{V}=v_\varphi,\quad \frac{V_Z}{V}=v_z,\quad \Phi=\varphi,\quad \frac{R}{a}=r,\quad \frac{Z}{a}=z,\quad \frac{P'}{\varrho/2V^2}=p.$$

Die Differentialgleichungen lauten dann

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_r}{r^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right)+2\xi v_\varphi\,, \tag{2a}$$

$$v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}+\frac{v_\varphi\cdot v_r}{r}=-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{r\partial\varphi}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r^2}+\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right)-2\,\xi\,v_r\,, \tag{2b}$$

$$v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right), \tag{2c}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0\,. \tag{2d}$$

Dabei ist $Re=\dfrac{Va}{\nu}$ und $\xi=\dfrac{\omega a}{V}$. Die zugehörigen Randbedingungen lauten

$$v_r=v_\varphi=v_z=0\quad\text{für}\quad z=\pm\frac{1}{2}\quad\text{und}\quad r=r_i=r_a-1\quad\text{und}\quad r=r_a\,.$$

Hierbei ist r_a der dimensionslose äußere und r_i der dimensionslose innere Halbmesser des Schraubenkanals. Aus den Gl. (2a) bis (2d) erkennen wir, daß das Strömungsfeld nur von den drei Parametern $Re=Va/\nu$, $\xi=\omega a/V$ und $r_m=\frac{1}{2}(r_i+r_a)$ abhängt.

b) Trennung in Kern- und Grenzschichtströmung. Für eine allgemeine Lösung sind diese Differentialgleichungen natürlich viel zu kompliziert. Um Näherungslösungen zu suchen, müssen wir zunächst den Bereich der Parameter Re, ξ, r_m für den die Lösungen gelten sollen, einschränken; denn die zu vernachlässigenden Glieder sind je nach dem Bereich der Parameter verschieden. Von der *Reynolds*schen Zahl Re wollen wir voraussetzen, daß sie groß gegen 100 ist, eine Voraussetzung, die bei den meisten technischen Strömungen zutrifft. Ferner wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen, daß die Kanalhöhe und -breite klein gegen den

mittleren Krümmungsradius des Kanals sind. Also $r_m \gg 1$. Von dem Parameter ξ wollen wir zunächst voraussetzen, daß er groß gegen 1 ist.

Betrachtet man nun unter den eben gemachten Voraussetzungen die Größenordnung der einzelnen Glieder in (2a) bis (2d), so erhält man folgendes Bild. In (2a) ist das Coriolisglied $2\,\xi\,v_\varphi$ sehr groß, d.h. die Corioliskraft drückt auf das strömende Medium stark in radialer Richtung. Macht man nun die plausible Annahme, daß die Querkomponenten der Strömung v_r und v_z höchstens die Größenordnung der Geschwindigkeitskomponente in Kanalrichtung v_φ erreichen, so kann dem starken Coriolisglied in (2a) im wesentlichen nur durch das Druckglied $-\frac{1}{2}\,\partial p/\partial r$ das Gleichgewicht gehalten werden, da die anderen Glieder alle zu klein sind. Betrachtet man nun (2c), worin die großen Coriolisglieder nicht auftreten, so werden hier alle Glieder und damit auch $-\frac{1}{2}\,\partial p/\partial z$ erheblich kleiner als $-\frac{1}{2}\,\partial p/\partial r$ in (2a). Daraus folgt dann, daß $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)$ nur klein sein kann und sich $\partial p/\partial r$ in Richtung z nur wenig ändert. Damit folgt dann aus (2a), daß der Verlauf von v_φ in Abhängigkeit von r für verschiedene z praktisch gleich ist. Bei Annäherung an die Wände $z = \pm\frac{1}{2}$ muß dagegen v_φ und damit das Coriolisglied $2\,\xi v_\varphi$ gegen Null gehen, während $\partial p/\partial r$ seine alte Größe behält. Hier müssen dann die anderen Glieder, nämlich die Beschleunigungs- und die Zähigkeitsglieder, dem großen Druckglied $\partial p/\partial r$ das Gleichgewicht halten. Unter den vorn gemachten Voraussetzungen sind die Beschleunigungsglieder aber nicht groß genug, so daß die Zähigkeitsglieder so groß werden müssen, daß sie dem Druckglied das Gleichgewicht halten. Sie können aber bei den vorausgesetzten hohen *Re*-Zahlen nur dann sehr groß werden, wenn diese Schicht an der Wand, in der v_φ auf Null abfällt sehr dünn ist, da dann das Zähigkeitsglied $\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}$ sehr groß wird.

Auf Grund dieser Überlegungen können wir bei der zu untersuchenden Kanalströmung zwei Gebiete unterscheiden.

1. Eine Kernströmung, die den gesamten Kanal erfüllt mit Ausnahme zwei dünner Schichten an den Seitenwänden $z = \pm\frac{1}{2}$. Bei dieser Kernströmung ist v_φ weit größer als die Komponenten v_r und v_z, und außerdem ist v_φ weitgehend von z unabhängig, so daß wir die Strömung in guter Näherung als ebene Strömung behandeln können. Eine solche Strömung tritt immer auf, wenn in einem rotierenden System die Umfangsgeschwindigkeit groß gegenüber den Strömungsgeschwindigkeiten ist und die Reibung keine wesentliche Rolle spielt, was bereits 1924 in einer Arbeit von *G. I. Taylor*[1] gezeigt wurde.

2. Eine Grenzschichtströmung in zwei dünnen Schichten an den Wänden $z = \pm\frac{1}{2}$. Bei dieser Grenzschichtströmung treten nun auch große v_r-Komponenten auf. Wegen der geringen Schichtdicke können wir bei ihrer Behandlung die üblichen Grenzschichtvernachlässigungen anwenden.

An den Anschlußstellen der beiden Gebiete müssen natürlich die Geschwindigkeiten übereinstimmen. Außerdem erfolgt eine Kopplung der Strömung in beiden Gebieten dadurch, daß die starken Corioliskräfte die Kernströmung je nach dem Vorzeichen der Rotation des Ringes langsam nach innen bzw. nach außen drängen, und in den Grenzschichten gemäß der Kontinuitätsgleichung die gleiche Menge zurückströmen muß. Wegen der geringen Dicke dieser Schichten treten dann die hohen v_r-Komponenten auf. Wir wollen nun versuchen die Gl.(2a) bis (2d) für die beiden Gebiete getrennt zu behandeln, wobei wir in jedem Gebiet die dort klein werdenden Glieder vernachlässigen, dabei müssen die Randbedingungen so gewählt werden, daß an den Grenzflächen zwischen den beiden Gebieten die Geschwindigkeiten stetig aneinander schließen.

c) Näherungslösung für Kern- und Grenzschichtströmung. Zunächst wollen wir die Kernströmung betrachten. Ihre Geschwindigkeiten seien mit einem Index 0 gekennzeichnet. In der Gl.(2b) für die Hauptströmungskomponente v_{φ_0} können wir dann von den Trägheitsgliedern das Glied $v_{z_0}\,\partial v_{\varphi_0}/\partial z$ wegen der Zweidimensionalität der Kernströmung vernachlässigen. Außerdem ist das Trägheitsglied $v_{r_0}\,v_{\varphi_0}/r$ zu vernachlässigen, da wir eine schwache Kanalkrümmung vorausgesetzt haben. Aus den gleichen Gründen können wir von den Zähigkeitsgliedern die Glieder $\frac{\partial^2 v_{\varphi_0}}{\partial z^2}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial v_{\varphi_0}}{\partial r}$ und $\frac{v_{\varphi_0}}{r^2}$ vernachlässigen. Ferner wollen wir anstatt $-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{r\,\partial\varphi}$ den üblichen Reibungsbewert λ einführen, der folgendermaßen definiert ist:

$$\lambda = -\frac{2\,a}{R_m\,\varrho\,V^2}\frac{\partial P}{\partial \Phi} = -\frac{1}{r_m}\frac{\partial p}{\partial \varphi}.$$

---

[1] *G. I. Taylor*, Experiments with Rotating Fluids. Proceedings of the first International Congress for Aplied Mechanics. Delft 1924.

Für v_{φ_0} erhalten wir damit die folgende Differentialgleichung:

$$v_{r_0}\frac{\partial v_{\varphi_0}}{\partial r}=\frac{\lambda\, r_m}{2\,r}+\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_{\varphi_0}}{\partial r^2}-2\,\xi\, v_{r_0}\,. \tag{3}$$

Die zugehörigen Randbedingungen lauten $v_{\varphi_0}=0$ für $r=r_i$ und $r=r_a$. Betrachten wir jetzt die Grenzschichtströmungen an den Wänden $z=\pm\frac{1}{2}$ so können wir die Trägheitsglieder von (2a) ganz streichen, da sie ja gegenüber $2\,\xi v_{\varphi_0}$ und $-\frac{1}{2}\,\partial p/\partial r$ unter den gemachten Voraussetzungen klein bleiben. Von den Zähigkeitsgliedern wird $\partial^2 v_r/\partial z^2$ groß gegenüber den anderen Zähigkeitsgliedern, so daß wir diese ebenfalls streichen können. In (2b) können wir die Trägheitsglieder gegenüber $2\,\xi v_r$ ebenfalls fortlassen. Von den Zähigkeitsgliedern brauchen wir wieder nur $\partial^2 v_\varphi/\partial z^2$ zu berücksichtigen. Außerdem können wir auch das Glied $\frac{1}{2}\,\frac{\partial p}{r\,\partial\varphi}$ vernachlässigen, da schon in der Kernströmung $2\,\xi v_{r_0}$ von der Größenordnung $\frac{1}{2}\,\frac{\partial p}{r\,\partial\varphi}$ ist, und hier aus Kontinuitätsgründen v_r und damit auch $2\xi v_r$ erheblich größer sind als $\frac{1}{2}\,\frac{\partial p}{r\,\partial\varphi}$. Damit lauten die Differentialgleichungen für die Grenzschichtströmungen dann

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+2\,\xi\, v_\varphi=0\,, \tag{4a}$$

$$\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}-2\,\xi\, v_r=0\,. \tag{4b}$$

Die zugehörigen Randbedingungen lauten

für den wandseitigen Rand: $z=\pm\frac{1}{2}\,,\quad v_r=0\,,\quad v_\varphi=0\,,$
für den strömungsseitigen Rand: $v_r=v_{r_0},\quad v_\varphi=v_{\varphi_0}\,.$

Außer durch diese Randbedingungen ist die Kernströmung mit der Grenzschichtströmung noch dadurch gekoppelt, daß der der Komponente v_{r_0} entsprechende Radialfluß in der Kernströmung gleich dem entsprechenden Rückfluß in der Grenzschicht sein muß.

Das radiale Druckgefälle $-\frac{1}{2}\,\partial p/\partial r$ in (4a) ist gleich dem radialen Druckgefälle in der Kernströmung und nach (2a) unter Vernachlässigung der kleinen Glieder gleich $-2\,\xi v_{\varphi_0}$. Durch Einführen in (4a) und (4b) erhalten wir für die Grenzschicht

$$\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+2\,\xi\,(v_\varphi-v_{\varphi_0})=0\,, \tag{5a}$$

$$\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}-2\xi\, v_r=0\,. \tag{5b}$$

Diese Gleichungen für die Grenzschicht wurden nun bereits von *Ekman*[1] gelöst, der die gleichen Strömungen bei Luft- und Meeresströmungen fand. Als Lösung ergibt sich

$$v_r=-\,v_{\varphi_0}\sin\sqrt{Re\,\xi}\left(z+\frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{Re\,\xi}\left(z+\frac{1}{2}\right)}\,, \tag{6a}$$

$$v_\varphi=v_{\varphi_0}\left[1-\cos\sqrt{Re\,\xi}\left(z+\frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{Re\,\xi}\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right]. \tag{6b}$$

Diese Formeln gelten für die Grenzschicht der linken Seitenwand $z=-\frac{1}{2}$. Für die Grenzschicht an der Wand $z=+\frac{1}{2}$ haben wir in (6a) und (6b) $z+\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{2}-z$ zu ersetzen. In (6a) und (6b) ist die Größe v_{φ_0}, d. h. die v_φ-Komponente der Kernströmung noch unbekannt. Wir müssen sie aus (3) ermitteln. Dazu müssen wir zunächst v_{r_0} in (3) auf Grund von (6a) und (6b) durch v_{φ_0} ausdrücken. Dies kann in einfacher Weise dadurch geschehen, daß wir den radialen Fluß in beiden Grenzschichten gleich dem entsprechenden radialen Rückfluß in der Kernströmung setzen, da die Kontinuitätsgleichung erfüllt sein muß. Bezeichnen wir die mit der Kantenlänge a dimensionslos gemachte Dicke der Grenzschicht mit δ, so ergibt sich

$$v_{r_0}=-\,\frac{2}{1-2\,\delta}\int_{\delta}^{\delta} v_r\,dz\,.$$

[1] *W. Ekman*, Dynamische Gesetze der Meeresströmungen. Innsbrucker Vorträge 1922.

Führen wir hier für v_r den Ausdruck aus (6a) ein und integrieren statt bis δ gleich bis ∞, was wegen des exponentiellen Abfalles von v_r erlaubt ist, so ergibt sich

$$v_{r_0} = \frac{2}{1-2\delta}\,\frac{1}{2\sqrt{Re\,\xi}}\,v_{\varphi_0} = \frac{v_{\varphi_0}}{1-2\delta}\,\frac{1}{\sqrt{Re\,\xi}} \approx \frac{v_{\varphi_0}}{\sqrt{Re\,\xi}}\,.$$

Als ungefähre dimensionslose Grenzschichtdicke können wir nach (6a) und (6b) $\delta = \pi/\sqrt{Re\,\xi}$ wählen. Die v_r-Komponente ist hier gerade Null und die v_φ-Komponente hat den Wert $\left(1-e^{-\pi}\right) v_{\varphi_0} \approx v_{\varphi_0}$ erreicht. Damit erhalten wir

$$v_{r_0} = \frac{v_{\varphi_0}}{1-2\pi/\sqrt{Re\,\xi}}\,\frac{1}{\sqrt{Re\,\xi}} = \frac{v_{\varphi_0}}{\sqrt{Re\,\xi}-2\pi} \approx \frac{v_{\varphi_0}}{\sqrt{Re\,\xi}}\,.$$

Durch Einführen dieses Ausdruckes in (3) erhalten wir als Differentialgleichung für die Kernströmung

$$\frac{v_{\varphi_0}}{\sqrt{Re\,\xi}-2\pi}\,\frac{\partial v_{\varphi_0}}{\partial r} = \frac{\lambda\, r_m}{2r} + \frac{1}{Re}\,\frac{\partial^2 v_{\varphi_0}}{\partial r^2} - \frac{2\,\xi\cdot v_{\varphi_0}}{\sqrt{Re\,\xi}-2\pi}\,. \tag{7}$$

Eine asymptotische Lösung dieser Differentialgleichung für große Re und $\xi \gg 1$ ergibt sich sehr einfach. In diesem Falle werden nämlich das Zähigkeitsglied und das Beschleunigungsglied klein gegenüber dem Coriolisglied, so daß wir sie vernachlässigen können. Außerdem können wir 2π gegen $\sqrt{Re\,\xi}$ streichen und erhalten

$$\frac{\lambda}{2}\,\frac{r_m}{r} - 2\sqrt{\xi/Re}\,v_{\varphi_0} = 0\,,$$

oder

$$v_{\varphi_0} = \frac{r_m}{r}\,\frac{\lambda}{4}\sqrt{\frac{Re}{\xi}}\,. \tag{8}$$

Wir bekommen also in der Kernströmung eine Geschwindigkeitsverteilung, die proportional $1/r$ geht. Die Randbedingung $v_{\varphi_0} = 0$ für $r = r_i$ und $r = r_a$ läßt sich beim Fortlassen des Reibungsgliedes natürlich nicht mehr erfüllen.

Da nun unter den gemachten Voraussetzungen die Seitengrenzschichten dünn gegenüber der Kernströmung sind, muß nach der Definitionsgleichung $\bar{v}_\varphi = 1$ näherungsweise gelten

$$\bar{v}_{\varphi_0} = \int_{r_m-1/2}^{r_m+1/2} v_{\varphi_0}\,dr = 1\,.$$

Und damit ergibt sich aus (8) für den Druckabfallkoeffizienten λ

$$\lambda = \frac{4\sqrt{Re\,\xi}}{Re}\,\frac{1}{r_m \log\dfrac{1+1/2\,r_m}{1-1/2\,r_m}} \approx \frac{4\sqrt{Re\,\xi}}{Re}\,.$$

Der Näherungsausdruck auf der rechten Seite gibt den genauen Ausdruck auf der linken Seite recht gut wieder, da die Abweichungen nur von der Ordnung $1/r_m^2$ sind, und wir $r_m \gg 1$ vorausgesetzt hatten. Auf den gleichen Näherungsausdruck wären wir gekommen, wenn wir gleich in (7) den Ausdruck $\frac{1}{2}\lambda\, r_m/r$ durch seinen Mittelwert $\frac{1}{2}\lambda$ ersetzt hätten. Bei den folgenden Rechnungen, die auch die anderen Glieder von (7) berücksichtigen, wollen wir dies der Einfachheit halber tun, da der Einfluß auf den λ-Wert nur gering ist.

d) Verbesserung der Lösung. Zuerst wollen wir die Formel für λ dadurch verbessern, daß wir in der (7) für die Kernströmung das Reibungsglied berücksichtigen. Dagegen soll das Beschleunigungsglied zunächst noch vernachlässigt werden. Dies erscheint aus folgendem Grunde gerechtfertigt. Nach Berücksichtigung des Reibungsgliedes haben wir ein in der Kanalmitte ungefähr konstantes v_{φ_0} zu erwarten, das an den Rändern $r = r_i$ und $r = r_a$ steil auf Null abfällt. Nur in diesen Randschichten hat das Beschleunigungsglied eine wesentliche Größe, da ja in der Kanalmitte $\partial v_{\varphi_0}/\partial r$ annähernd Null sein wird. Wegen des Vorzeichenwechsels von $\partial v_{\varphi_0}/\partial r$ wird es in der einen Randschicht bremsend und in der anderen beschleunigend wirken, so daß sich sein Einfluß im wesentlichen auf die Profilform aber wenig auf die Durchflußmenge und damit auf den λ-Wert auswirken wird.

Aus (7) erhalten wir für diesen Fall

$$\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_{\varphi_0}}{\partial r^2}-\frac{2\,\xi\,v_{\varphi_0}}{\sqrt{Re\,\xi}-2\,\pi}=0\,. \tag{10}$$

Für $r=r_m+\frac{1}{2}$ und $r=r_m-\frac{1}{2}$ muß jetzt $v_{\varphi_0}=0$ sein. Als Lösung ergibt sich

$$v_{\varphi_0}=\frac{\lambda}{4}\frac{\sqrt{Re\,\xi}-2\,\pi}{\xi}\left(1-\frac{\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{2\,\xi\,Re}{\sqrt{Re\,\xi}-2\,\pi}}\,(r_m-r)}{\mathfrak{Cof}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,\xi\,Re}{\sqrt{Re\,\xi}-2\,\pi}}}\right). \tag{11}$$

Um nun wieder den Reibungsbeiwert λ zu erhalten, müssen wir den Mittelwert von v_φ über den ganzen Querschnitt bilden und diesen definitionsgemäß gleich 1 setzen. Dieser Mittelwert lautet

$$\bar{v}_\varphi=(1-2\,\delta^*)\int_{r_m-1/2}^{r_m+1/2} v_{\varphi_0}\,dr=1\,.$$

Dabei ist δ^* die Verdrängungsdicke der Seitengrenzschicht. Der Faktor $1-2\,\delta^*$ berücksichtigt also den Einfluß dieser Seitengrenzschicht auf den Durchfluß.

Aus (6b) ergibt sich in hinreichender Näherung die Verdrängungsdicke

$$\delta^*=\frac{1}{2\sqrt{Re\,\xi}}\,.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (12) ein und führen das Integral unter Berücksichtigung von (11) aus und lösen nach λ auf, so ergibt sich unter Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung

$$\lambda=\frac{4\sqrt{Re\,\xi}}{\left(1-\frac{2\,\pi}{\sqrt{Re\,\xi}}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{Re\,\xi}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{Re\,\xi}}\right)}\frac{1}{Re}\,. \tag{13}$$

Aus dieser Gleichung erkennen wir, daß λ sich in der Form

$$\lambda=\frac{f(Re\,\xi)}{Re}$$

darstellen läßt. Setzt man diesen Ausdruck in (11) ein, so erkennt man, daß auch der Verlauf von v_{φ_0} über r nur von $Re\,\xi$ abhängt.

Wir wollen nun den Einfluß des bisher vernachlässigten Beschleunigungsgliedes auf λ und den v_{φ_0}-Verlauf untersuchen. Da es sich hier doch nur um eine kleine Korrektur der bisherigen Formeln handelt, wollen wir bei diesen Untersuchungen den Einfluß der Seitengrenzschicht fortlassen, d. h. in (7) für die Kernströmung wollen wir $2\,\pi$ gegen $\sqrt{Re\,\xi}$ vernachlässigen. Für große $Re\,\xi$-Werte ist dies ohne weiteres zulässig, und für kleine $Re\,\xi$-Werte können wir in erster Näherung den Einfluß des Beschleunigungsgliedes und den Einfluß der Seitengrenzschichten getrennt behandeln und dann später beide Einflüsse addieren. Da r_m groß gegen 1 ist, wollen wir ferner r durch seinen Mittelwert r_m ersetzen. Aus (7) folgt dann

$$\frac{1}{\sqrt{Re\,\xi}}\,v_{\varphi_0}\frac{\partial v_{\varphi_0}}{\partial r}=\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_{\varphi_0}}{\partial r^2}-2\sqrt{\frac{\xi}{Re}}\;v_{\varphi_0}\,. \tag{14}$$

Um nun aus dieser Differentialgleichung für ein bestimmtes Re und ξ den v_{φ_0}-Verlauf und λ durch Integration zu bestimmen, müßten wir folgendermaßen vorgehen: Wir wählen Re und ξ, schätzen dann den zu erwartenden λ-Wert und integrieren anschließend die Differentialgleichung für die Randbedingungen $v_{\varphi_0}=0$ für $r=r_m+\frac{1}{2}$ und $r=r_m-\frac{1}{2}$. Danach bilden wir den Mittelwert von v_{φ_0} und sehen zu ob dieser gleich 1 ist. Wenn $\bar{v}_{\varphi_0}$ nicht gleich 1 ist, muß das Verfahren mit abgeänderten λ so lange wiederholt werden bis $\bar{v}_{\varphi_0}=1$ ist. Um dies umständliche Verfahren zu vermeiden, wollen wir andere dimensionslose Größen für v_{φ_0} und λ einführen, indem wir die Geschwindigkeiten und den Druck nicht mehr mit der mittleren Strömungsgeschwindig-

keit V, sondern mit der Geschwindigkeit ν/a dimensionslos machen. Es ergibt sich dann

$$\tilde{v}_{\varphi_0} = \frac{V_{\Phi_0} a}{\nu} = v_{\varphi_0} Re\,, \tag{15a}$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{2a^3}{\varrho V^2 R} \frac{\partial P}{\partial \Phi} = \lambda\, Re^2\,. \tag{15b}$$

Durch Einführen dieser Größen in (14) ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{Re\,\xi}}\, \tilde{v}_{\varphi_0} \frac{\partial \tilde{v}_{\varphi_0}}{\partial r} = \frac{\tilde{\lambda}}{2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_{\varphi_0}}{\partial r^2} - 2\sqrt{Re\,\xi}\, \tilde{v}_{\varphi_0}\,. \tag{16}$$

In dieser Gleichung können wir nun $Re\,\xi$ und $\tilde{\lambda}$ in gewissen Grenzen beliebig wählen und die Differentialgleichung integrieren. Aus dem $\tilde{v}_{\varphi_0}$-Verlauf erhalten wir dann durch Mittelwertbildung wegen (15a) die zugehörige Re-Zahl, also

$$\bar{\tilde{v}}_{\varphi_0} = \bar{v}_{\varphi_0} Re = Re\,.$$

Für v_{φ_0} und λ ergibt sich

$$v_{\varphi_0} = \frac{\tilde{v}_{\varphi_0}}{Re} \qquad \text{und} \qquad \lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{Re^2}\,.$$

Für den Fall $\sqrt{Re\,\xi} = 70$ und $\tilde{\lambda} = 560000$ wurde die Differentialgleichung (16) numerisch integriert. Es ergibt sich dann durch Integration der $\tilde{v}_{\varphi_0}$-Kurve die Re-Zahl 1592. Daraus folgt dann nach (15b) $\lambda = 0{,}22095$. Berechnet man den λ-Wert für $\sqrt{Re\,\xi} = 70$ und $Re = 1592$ nach (13) unter Fortlassen der Glieder $1 - 2\pi/\sqrt{Re\,\xi}$ und $1 - 1/\sqrt{Re\,\xi}$, die ja nur von der Berücksichtigung der Seitengrenzschichten stammen, die ja bei unseren numerischen Rechnungen auch vernachlässigt wurden, so ergibt sich $\lambda = 0{,}21165$. Die Berücksichtigung des Beschleunigungsgliedes ergibt also nur eine Erhöhung des λ-Wertes um 4,2%. Der Einfluß des Beschleunigungsgliedes auf das Profil der Kernströmung ist aber erheblich höher, wie man aus Abb. 3 erkennt, bei der einmal das durch numerische Integration gewonnene Profil nach (16) und das Profil nach (11) unter Vernachlässigung von 2π gegen $\sqrt{Re\,\xi}$ (Vernachlässigung des Einflusses der Seitengrenzschicht) eingetragen wurde. Wir sehen, daß durch Berücksichtigung des Beschleunigungsgliedes das Profil stark asymmetrisch geworden ist. Hätten wir die Differentialgleichung für den Fall integriert, daß die Strömung gegensinnig zur Rotation verläuft, hätten wir ein zur Mittellinie spiegelbildliches Profil erhalten.

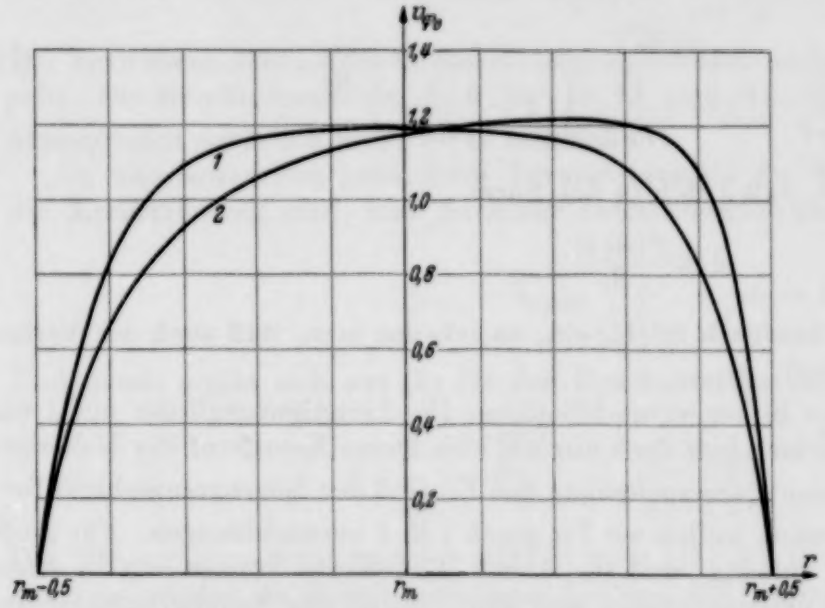

Abb. 3. Geschwindigkeitsprofil der Kernströmung
1. ohne Beschleunigungsglied, *2.* mit Beschleunigungsglied.

Der gesamte Strömungsverlauf im Kanalquerschnitt, d. h. die v_φ und v_r-Komponente für Kernströmung und Seitengrenzschicht ist für den gleichen $Re\,\xi$-Wert wie in Abb. 3 in Abb. 4 dargestellt. Die zugehörige v_z-Komponente folgt aus dem v_r-Verlauf nach der Kontinuitätsgleichung (2d). In Abb. 4 ist der Strömungsverlauf für den Fall dargestellt, daß Rotation und Strömung gleichsinnig erfolgen. Will man das entsprechende Bild für den Fall haben, daß Strömung und Rotation in entgegengesetzter Richtung erfolgen, muß man die v_r-Komponente in umgekehrter Richtung zeichnen und das senkrechte Profil in Abb. 4 an der Mittellinie spiegeln.

Setzt man in (14) für λ den Näherungsausdruck $4\sqrt{Re\,\xi}/Re$ ein, so erkennt man, daß bei festen $Re\,\xi$ mit wachsender Re-Zahl das Beschleunigungsglied relativ zu den anderen Gliedern wächst und damit auch sein Einfluß auf den λ-Wert und das Profil zunimmt.

Wir haben bisher stets vorausgesetzt, daß der Kanal ring- oder schraubenförmig ist. Es läßt sich jedoch einfach zeigen, daß sowohl unsere theoretischen Ableitungen wie auch unsere Messungen genau so gut auch für einen radialen oder spiralenförmig verlaufenden Kanal quadratischen Querschnittes gelten müssen. Hat man nämlich einen solchen radialen oder spiralenförmig verlaufenden Kanal, so erhält man fast die gleichen Differentialgleichungen für die Strömung wie beim ring- oder schraubenförmigen Kanal, wenn man Polarkoordinaten einführt, deren Zentrum im Krümmungsmittelpunkt des Kanales liegt. Der einzige Unterschied besteht nur darin, daß jetzt die Beschleunigung $\omega^2 R$ nicht mehr senkrecht zur Kanalrichtung hat. Durch Einführen eines Druckes $P' = P + \varrho/2\,\omega^2 R^2$ fällt dieses Glied genau so wieder fort wie beim ring- bzw. schraubenförmigen Kanal. Man erhält daher die gleichen Gleichungen Gl. (2a) bis (2d) und damit auch das gleiche Strömungsfeld und den gleichen λ-Wert.

3. Experimenteller Teil. a) Versuchsaufbau. Zur Prüfung der im theoretischen Teil abgeleiteten Ergebnisse wurden Druckabfallmessungen an einem rotierenden schraubenförmigen Kanal durchgeführt, der dadurch hergestellt wurde, daß ein schraubenförmiger Gang von 15×15 mm mit einer Steigung von 20 mm in einen Aluminiumzylinder von 185 mm Durchmesser eingeschnitten wurde. Durch Aufschrumpfen eines Aluminiumhohlzylinders wurde der Kanal nach außen abgeschlossen. Die Luft wird dem Kanal durch die hohle Welle, radiale Bohrungen und einen ringförmigen Sammelraum zugeführt. Die Abführung der Luft erfolgt in der gleichen Weise am anderen Wellenende. Um den zusätzlichen Druckabfall, der beim Einlauf der Strömung in den Kanal und der Ausbildung des endgültigen Profiles entsteht, nicht mitzumessen, befindet sich die erste Druckanbohrung ungefähr 50 Kantenlängen, d. h. 750 mm vom Anfang des Kanales entfernt. Die zweite Druckanbohrung befindet sich genau 12 Gang hinter der ersten, so daß der Druckabfall über eine Strecke von 425 Kantenlängen oder 6400 mm gemessen wurde. Die Welle war in zwei Kugellagern gelagert und wurde durch einen Motor über ein stufenloses Getriebe angetrieben, wobei Drehzahlen von 4600/min erreicht werden konnten. Die Meßdrücke von den beiden Druckanbohrungen wurden an der Welle über ölgedichtete, nicht mitrotierende Kammern abgenommen. Die Menge der durch den Kanal gesaugten Luft wurde durch eine Meßblende gemessen.

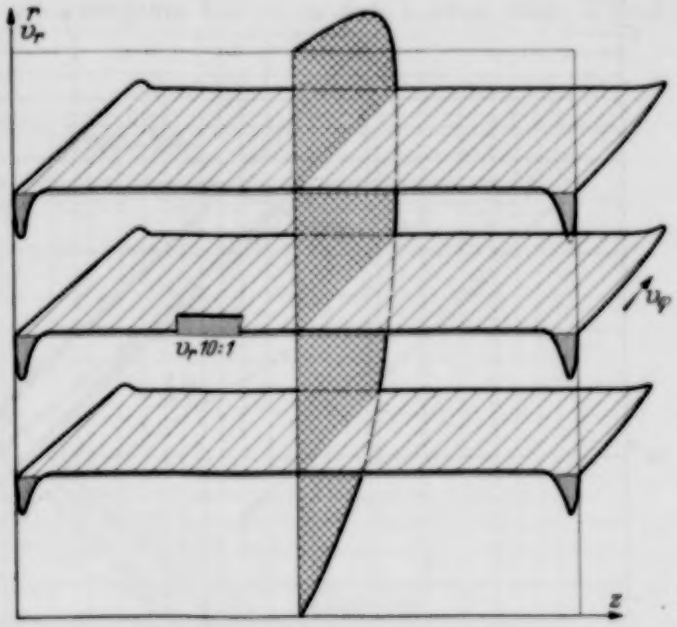

Abb. 4. Geschwindigkeitsverteilung im Kanalquerschnitt.

b) Versuchsdurchführung und Auswertung. Bei den festen Drehzahlen $n = 0$, $n = \pm 1140$, $n = \pm 2280$, $n = \pm 3420$, $n = \pm 4560$ wurde der Druckabfall zwischen den beiden Druckmeßbohrungen in Abhängigkeit von der durchfließenden Luftmenge gemessen. Gleichzeitig wurden die Absolutdrücke an den beiden Meßstellen gemessen. Dabei wurde der Druckabfall durch die Zentrifugalkräfte in den beiden mitrotierenden Druckmeßleitungen rechnerisch berücksichtigt. Wegen der symmetrischen Leitungsführung für die beiden Druckmeßstellen hebt sich bei der Druckabfallmessung dieser Einfluß der Zentrifugalkräfte heraus. Nur bei großen Durchflußgeschwindigkeiten, bei denen der Druck im Kanal so weit abfällt, daß eine merkliche Dichteänderung auftritt, sind die Druckänderungen durch die Zentrifugalkräfte in den beiden Leitungen nicht ganz gleich. Hier wurde ebenfalls eine rechnerische Korrektur des Differenzdruckes vorgenommen. Die Temperatur der strömenden Luft wurde gleich der Zimmertemperatur gesetzt, da die Luft ja direkt aus dem Raum angesaugt wurde und der Aluminiumzylinder ebenfalls Zimmertemperatur hatte. Die Änderung der Lufttemperatur durch die Beschleunigung der Luft beim Ansaugen und durch die Pumpwirkung der radialen Zuführungskanäle war bei den größten Strömungsgeschwindigkeiten und Drehzahlen so gering, daß sie vernachlässigt werden konnte.

Um nun eine große Allgemeingültigkeit der Messungen zu erreichen, und um sie mit den Rechnungen des theoretischen Teiles vergleichen zu können, wurden die gemessenen Werte in

geeigneter Weise dimensionslos gemacht. Die Durchflußmenge wurde durch die *Reynolds*sche Zahl $Re = Va\,\varrho/\mu$ dargestellt, wobei V die über den Kanalquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit ist, a die Seitenlänge des quadratischen Kanales, ϱ die Dichte und μ die Zähigkeit der Luft.

Der Druckabfall $p_1 - p_2$ wurde durch den dimensionslosen Rohrreibungsbeiwert $\lambda = (p_1 - p_2)a/\frac{1}{2}\,\varrho\,V^2 l$ dargestellt, wobei l die Länge des Kanales zwischen den beiden Druckmeßstellen ist, gemessen längs der durch die Querschnittmitte des Kanales gehenden Schraubenlinie.

Die Drehzahl n wurde durch den Parameter $\xi = a\,\omega/V$ bzw. $Re\,\xi = \omega^2 a\,\varrho/\mu$ dargestellt, wobei ω die Kreisfrequenz der Drehung ist.

Bei größeren Durchflußgeschwindigkeiten tritt nun längs des Kanales ein beträchtlicher Druckabfall auf, so daß sich auch der absolute Druck und damit auch die Dichte und die Geschwindigkeit längs des Kanales ändert. Nach der Kontinuitätsgleichung bleibt aber $\varrho\,V$ und

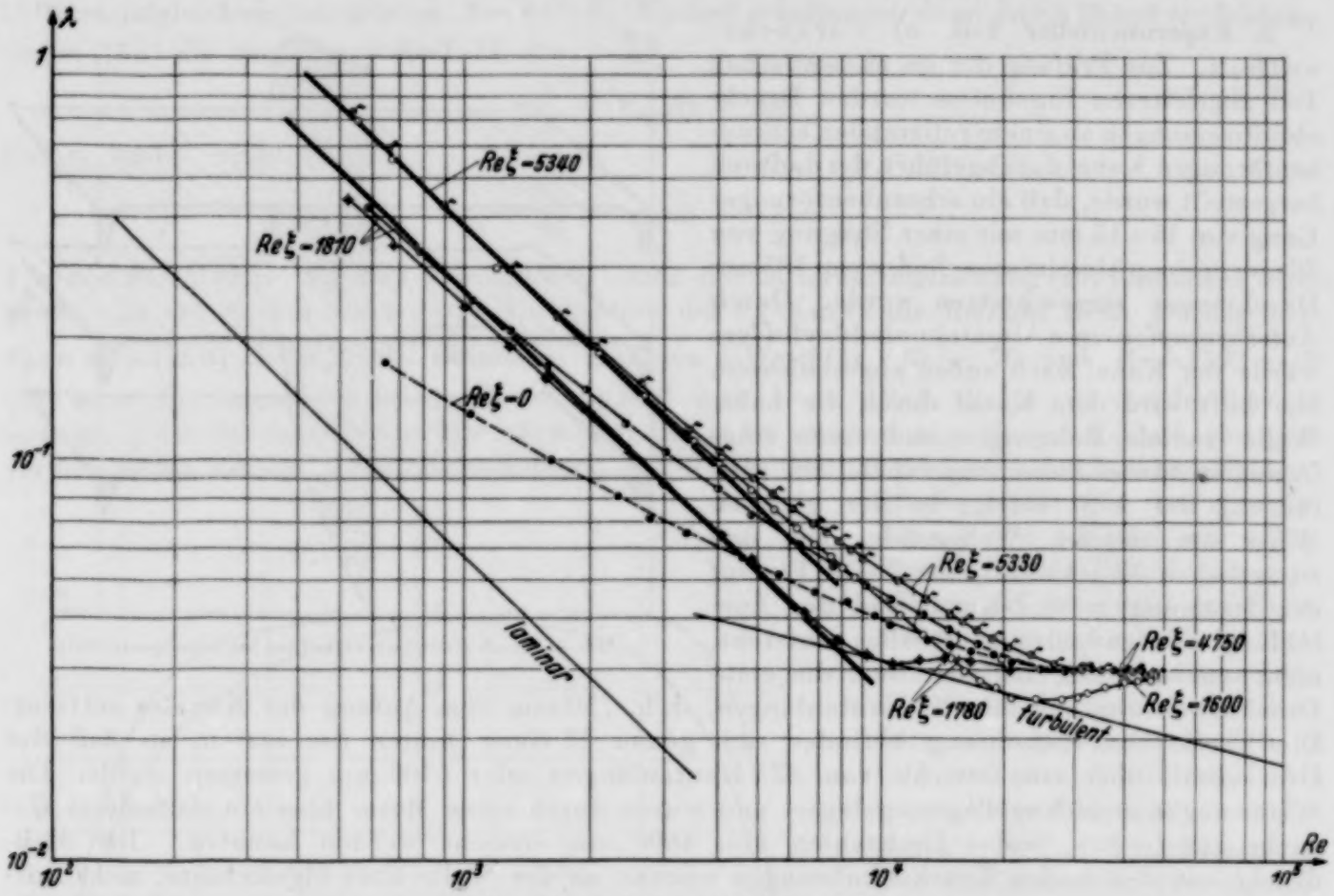

Abb. 5. Reibungsbeiwert λ über der *Re*-Zahl.

damit unter Voraussetzung konstanter Temperatur auch die *Re*-Zahl konstant. Der örtliche Druckabfallbeiwert λ (gebildet mit dem Druckabfall über eine kleine Länge Δl) hängt nun nur von der *Re*-Zahl ab und ist daher längs des ganzen Kanales konstant. Der Staudruck $q = \frac{1}{2}\,\varrho\,V^2$ ist dagegen längs des Kanales veränderlich. Wir haben nun in diesen Fällen den Beiwert λ mit dem mittleren Staudruck $q = \frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}\,\varrho_1 V_1^2 + \frac{1}{2}\,\varrho_2 V_2^2)$ gebildet, also

$$\lambda = \frac{4\,(p_1 - p_2)\,a}{(\varrho_1 V_1^2 + \varrho_2 V_2^2)\,l}\,.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß diese Formel exakt den richtigen λ-Wert für die entsprechende *Re*-Zahl ergibt.

c) Versuchsergebnisse. In Abb. 5 und 6 sind nun die Ergebnisse der Messungen aufgetragen. Und zwar ist über dem Logarithmus der *Reynolds*schen Zahl der Logarithmus von λ aufgetragen. Als Kurvenparameter ist der Wert $Re\,\xi$ benutzt. Da nun bei den Messungen aus versuchstechnischen Gründen ω und nicht $Re\,\xi$ konstant gehalten wurde, ändert sich der Wert $Re\,\xi$ längs der Meßkurven ein wenig, da sich die mittlere Dichte im Kanal wegen des Druckabfalles etwas ändert. Diese Änderung von $Re\,\xi$ hat aber nur bei größeren *Re*-Zahlen eine meßbare Größenordnung. Sie ist bei der Auftragung dadurch berücksichtigt, daß an die Meßkurven an einigen Stellen die jeweiligen $Re\,\xi$-Werte angeschrieben sind. Gleichzeitig ist in die

beiden Abb. 5 und 6 das Widerstandsgesetz für den geraden nicht rotierenden Kanal für laminare und für turbulente Strömung eingetragen. Außerdem wurde die gemessene λ-Kurve für $Re\,\xi = 0$, d. h. das Widerstandsgesetz für den gekrümmten nicht rotierenden Kanal eingetragen. Für jeden $Re\,\xi$-Wert ergeben sich zwei Kurven, die sich dadurch unterscheiden, daß einmal die Strömung in den schraubenförmigen Kanal gleichsinnig mit der Rotation und zum anderen gegensinnig mit der Rotation strömt.

Wir können nun bei den Kurven drei *Re*-Zahlbereiche unterscheiden:

1. der *Re*-Zahlbereich in dem $\xi \gg 1/r_m$ ist,
2. der *Re*-Zahlbereich in dem $\xi \approx 1/r_m$ ist,
3. der *Re*-Zahlbereich in dem $\xi \ll 1/r_m$ ist.

Der erste Fall ist derjenige, den wir unseren Rechnungen zugrunde gelegt haben. Zur Prüfung unserer Rechnungen haben wir daher als dick ausgezogene Kurve in den beiden Abb. 5 und 6

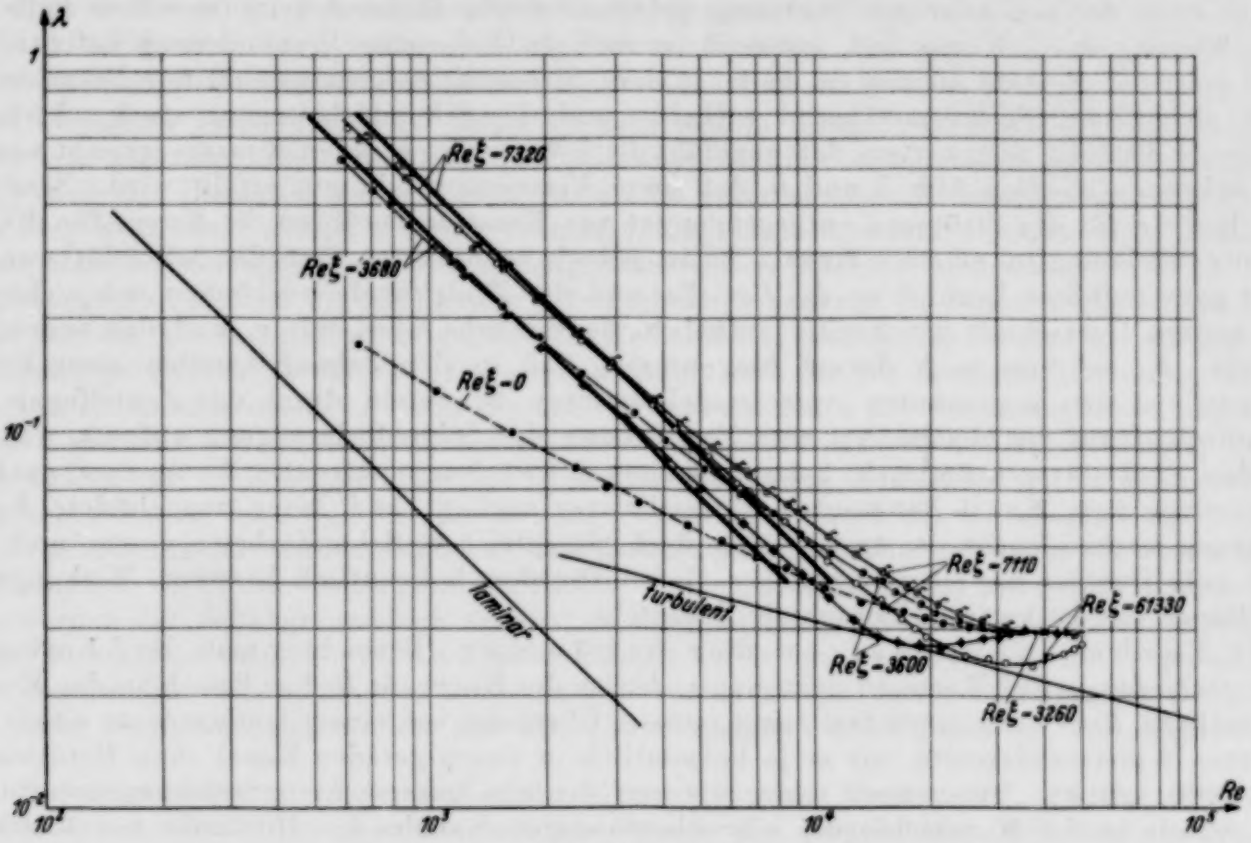

Abb. 6. Reibungsbeiwert λ über der *Re*-Zahl.

den λ-Wert nach (16) eingetragen. Wir erkennen, daß unsere Rechnungen den Druckabfall recht gut wiedergeben. Der Grund dafür, daß die gerechneten Kurven Geraden sind, während die gemessenen Kurven leicht nach oben gekrümmt sind, liegt darin, daß wir bei den Rechnungen das Beschleunigungsglied vernachlässigt haben. Im theoretischen Teil hatten wir nämlich gesehen, daß die Berücksichtigung des Beschleunigungsgliedes eine mit der *Re*-Zahl wachsende Vergrößerung des λ-Wertes ergibt, was einer Krümmung der λ-Kurve nach oben entspricht.

Im dritten Bereich sind die Coriolisglieder $2\,\xi\,v_\varphi$ und $2\,\xi\,v_r$ in (2a) und (2b) klein gegenüber den Krümmungsgliedern v_φ^2/r und $v_r\,v_\varphi/r$. Hier muß der Einfluß der Rotation ganz verschwinden, und die Kurven müssen sich der Kurve für $Re\,\xi = 0$ nähern, wie es die Messungen auch zeigen. Derartige Strömungen an einem gekrümmten, aber nicht rotierenden Kanal wurden bereits ausführlich in Arbeiten von *Adler*[1] und *J. R. Weske*[2] untersucht. Sie sollen hier nicht näher untersucht werden, da wir uns ja auf Strömungen in einem rotierenden System beschränken wollen. Wir wollen aber kurz das Ergebnis der *Adler*schen Untersuchungen angeben, da wir es für die Erklärung des Widerstandgesetzes im zweiten Bereich brauchen. Nach diesen Untersuchungen bildet sich bei der Strömung durch ein gekrümmtes Rohr bei hohen *Re*-Zahlen eine Grenzschicht an den Seiten des Rohres aus, die nach der Innenseite des gekrümmten Rohres fließt, während der Kern der Strömung sich langsam in entgegen-

[1] *M. Adler*, Z. angew. Math. Mech. 14 (1934). S. 257.
[2] *J. R Weske*, Journal Applied Mechanics 15 (1948), S. 344.

gesetzter Richtung bewegt. Wir haben also äußerlich gesehen das gleiche Strömungsbild wie im Bereich 1. Der Unterschied besteht nur darin, daß im Bereich 1 die Sekundärbewegung durch das Coriolisglied $2\xi v_\varphi$ in (2a) hervorgerufen wird, während sie im Bereich 3 durch das Zentrifugalglied v_φ^2/r hervorgerufen wird. Da nun aber das Coriolisglied $2\xi v_\varphi$ mit v_φ sein Vorzeichen ändert, während das Zentrifugalglied v_φ^2/r stets dasselbe Vorzeichen hat, kann bei der durch das Coriolisglied hervorgerufenen Sekundärbewegung sowohl der Kern nach außen und die Grenzschicht nach innen als auch der Kern nach innen und die Grenzschicht nach außen strömen, je nach der Richtung von v_φ relativ zur Drehbewegung, während bei der durch das Zentrifugalglied hervorgerufenen Sekundärbewegung stets der Kern nach außen und die Grenzschicht nach innen strömt.

Im zweiten Bereich sind nun das Coriolisglied und das Zentrifugalglied von gleicher Größenordnung. Wenn nun Strömung und Rotation im gleichen Sinne erfolgen, wird die durch das Coriolisglied hervorgerufene Sekundärbewegung durch das Zentrifugalglied verstärkt, während sie im Falle der gegensinnigen Strömung gebremst wird. Dadurch tritt im ersten Falle eine Vergrößerung des λ-Wertes auf, während im zweiten Falle eine Verminderung auftritt. Bei einer gewissen *Re*-Zahl können im Falle, in dem Strömung entgegengesetzt zur Rotation verläuft, sich beide Glieder annähernd aufheben und die Sekundärbewegung stark schwächen. In diesem Falle ist zu erwarten, daß ungefähr die λ-Werte des geraden Kanales erreicht werden. Wir erkennen aus den Abb. 5 und 6, daß diese Vermutung sehr gut erfüllt wird. Sämtliche vier Kurven für die Strömung entgegengesetzt zur Rotation berühren die Kurve für die turbulente Strömung im geraden Kanal. Es ist jedoch zu beachten, daß die Sekundärbewegung nicht ganz aufhören kann, denn das Coriolis- und das Zentrifugalglied können sich nicht über den ganzen Querschnitt gleichzeitig aufheben, da das eine Glied mit v_φ und das andere mit v_φ^2 geht. Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß in den Schaufelkanälen eines Radialgebläses bei den sogenannten vorwärtsgekrümmten Schaufeln durch das Zentrifugal- und Coriolisglied auf die gleiche Art eine Verstärkung der Sekundärbewegung auftritt, während bei den rückwärtsgekrümmten Schaufeln eine Schwächung auftritt. Wenn hier auch im allgemeinen kein Kanal konstanten Querschnittes vorliegt und keine ausgebildete Kanalströmung vorhanden ist, so treten hier doch die gleichen Sekundärbewegungen und Verluste auf. Dies ist mit ein wesentlicher Grund für den bekanntlich besseren Wirkungsgrad der Räder mit rückwärtsgekrümmten Schaufeln.

d) Turbulenzverhalten der Strömung. Betrachtet man die λ-Kurven für die verschiedenen $Re\,\xi$-Werte, so sieht man weder bei der Kurve für $Re\,\xi = 0$ noch bei den Kurven für endliche $Re\,\xi$-Werte einen fast sprungweisen Übergang von einem laminaren zu einem turbulenten Widerstandsgesetz, wie er ja bekanntlich in einem geraden Kanal ohne Rotation bei $Re \approx 2000$ auftritt. Um nun zu sehen wie weit die hier untersuchten Strömungen turbulent sind, wurde in der Kanalachse des schraubenförmigen Kanales ein Hitzdraht von 0,008 mm angebracht und mittels eines Turbulenzmeßgerätes (elektrischer Verstärker mit Kompensationsschaltung für die Wärmeträgheit des Hitzdrahtes) die turbulenten Schwankungen gemessen bzw. mit einem Kathodenstrahloszillographen sichtbar gemacht. Der Hitzdraht war dabei ziemlich am Ende des schraubenförmigen Kanales angebracht, so daß die Störungen vom Kanaleinlauf sicher abgeklungen waren. Die Zuleitungen zum Hitzdraht im rotierenden Kanal wurden dabei über umlaufende Quecksilberkontakte auf der Welle geleitet, um Störungen durch Schleifkontakte zu vermeiden.

Bei diesen Hitzdrahtuntersuchungen war jedoch eine quantitative Messung der Stärke der Turbulenz nicht möglich, da nämlich bei hohen Geschwindigkeiten die auftretenden Frequenzen der Geschwindigkeitsschwankungen am Hitzdraht viel zu hoch waren, um trotz des kleinen Hitzdrahtdurchmessers und der Wärmeträgheitskompensationsschaltung richtig wiedergegeben zu werden. Der Grund für die hohen Frequenzen der Geschwindigkeitsschwankungen liegt darin, daß wir bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten gemessen haben (bis 50 m/s) und daß wegen der kleinen Kanalabmessungen (15×15 mm) die auftretenden Turbulenzelemente sehr klein sind. Einem Durchmesser der Turbulenzelemente von 2 mm entspricht z. B. bei einer Strömungsgeschwindigkeit von 50 m/s bereits eine Frequenz von 25000 Hz, während das Gerät nur Frequenzen bis annähernd 10000 Hz richtig wiedergibt. Man kann daher mit dem Hitzdraht nur feststellen, ob die Strömung laminar oder ob sie mehr oder weniger turbulent ist, ohne quantitativ die Stärke der Turbulenz angeben zu können.

Wir wollen nun auf Grund der λ-Messungen und der Hitzdrahtuntersuchungen den Einfluß der Turbulenz auf die λ-Kurven besprechen. Betrachten wir zunächst die λ-Kurve für $Re\,\xi = 0$,

das heißt die Kurve für den gekrümmten nicht rotierenden Kanal, so liegt die einzige Unregelmäßigkeit im Verlauf dieser Kurve bei $Re \approx 25000$, denn hier ändert die Kurve ziemlich schnell ihre Richtung und läuft für große *Re*-Werte annähernd horizontal. Man könnte nun zunächst vermuten, daß hier bei $Re \approx 25000$ die Strömung anfinge turbulent zu werden, und daß die Stärke der Turbulenz mit zunehmender *Re*-Zahl anstiege, da hierdurch ein entsprechender Kurvenverlauf erklärt würde. Mit dem Hitzdraht beobachtet man jedoch, daß schon bei *Re*-Zahlen von $Re = 700$ bis 800 die erste schwache Turbulenz beginnt, und daß die Intensität dieser Turbulenz dann mit zunehmender *Re*-Zahl immer stärker wird. Der Grund für dies allmähliche Ansteigen der Turbulenzstärke wird darin liegen, daß in der Kernströmung eine Instabilität entsteht, die zur Turbulenz führt, wobei jedoch beim Rückströmen durch die Seitengrenzschichten, deren *Re*-Zahl noch so klein ist, daß hier die Strömung noch laminar ist, die Turbulenzintensität wieder stark vermindert wird. Je höher nun die *Re*-Zahl wird, desto stärker werden die Instabilitäten, und es kann sich daher eine stärkere Turbulenz ausbilden ehe sie beim Durchströmen der Seitengrenzschichten wieder geschwächt wird. Der Knick der Kurve bei $Re \approx 25000$ wird dann wahrscheinlich dadurch bedingt, daß hier auch die Seitengrenzschicht anfängt turbulent zu werden.

Bei endlichen $Re\,\xi$-Werten, das heißt bei rotierendem Kanal, tritt ebenfalls schon bei *Re*-Zahlen von ungefähr 1000 eine schwache Turbulenz auf, die mit steigender *Re*-Zahl anwächst, ohne jedoch die Intensität zu erreichen, wie sie im geraden nicht rotierenden Kanal auftritt. Auch hier wird die Turbulenz in der Kernströmung entstehen und dadurch klein gehalten, daß sie beim Rückströmen durch die Seitengrenzschichten jedesmal wieder abgeschwächt wird. Die Seitengrenzschichten werden dann erst bei erheblich höheren *Re*-Zahlen turbulent werden, da die mit der Grenzschichtdicke gebildeten *Re*-Zahlen erheblich kleiner sind als die mit der Kanalhöhe gebildeten *Re*-Zahlen. Der Grund dafür, daß die für laminare Rechnung durchgeführten Rechnungen selbst in dem Bereich, in dem der Kern der Strömung schon turbulent ist, noch gut mit den Messungen übereinstimmen, liegt darin, daß die Kernströmung durch die Turbulenz nur wenig beeinflußt wird. In der Kernströmung wird ja, wie wir im theoretischen Teil gesehen haben, dem Druckgradienten im wesentlichen durch das Coriolisglied das Gleichgewicht gehalten, während die Zähigkeit und damit auch die Turbulenz, die ja wie eine scheinbare Zähigkeit wirkt, nur einen geringen Einfluß auf die Kernströmung haben. Erst beim Turbulentwerden der Seitengrenzschichten wird sich der Einfluß der Turbulenz auf die Strömung stärker bemerkbar machen. Diesen Effekt können wir in unserem Falle durch Vergleich von Rechnung und Messung nicht mehr feststellen, da vorher andere Voraussetzungen der Rechnung nicht mehr zutreffen (insbesondere daß das Zentrifugalglied klein gegen das Coriolisglied ist).

4. Zusammenfassung. In einem Kanal mit quadratischen Querschnitt, der um eine Achse rotierte, die senkrecht zur Kanalachse steht, wurde die ausgebildete Strömung untersucht. Dabei zeigte sich, daß man bei genügend hoher Rotationsgeschwindigkeit des Kanales das Strömungsfeld in zwei Gebiete aufteilen kann. Nämlich in eine Grenzschichtströmung an denjenigen Seitenwänden des Kanales, die in Richtung der Normalen zur Rotationsachse verlaufen, und in eine Kernströmung, die das übrige Gebiet des Kanales ausfüllt. Dabei sind in den Gleichungen für die Grenzschichtströmung nur die Coriolis-, Druck- und Zähigkeitskräfte wesentlich, während man bei der Kernströmung für eine erste Näherung nur die in Kanalrichtung fallende Komponente der Corioliskraft und das Druckgefälle zu berücksichtigen braucht. Unter diesen Vereinfachungen und unter Berücksichtigung der Anschlußbedingungen zwischen den beiden Gebieten konnte für laminare Strömung das Strömungsfeld und der Reibungsbeiwert λ für den Kanal ausgerechnet werden. Es zeigte sich dabei, daß der Reibungswiderstand in einem Kanal in einem rotierenden System sich ganz erheblich von den Werten unterscheidet, die für die Kanalströmung im ruhenden System bekannt sind. Die erhaltene Formel für den Reibungsbeiwert λ konnte noch dadurch verbessert werden, daß auch das Reibungsglied in der Gleichung für die Kernströmung mitberücksichtigt wurde. Durch eine numerische Integration der Differentialgleichung für die Kernströmung wurde dann noch der Einfluß des Beschleunigungsgliedes auf den λ-Wert abgeschätzt, wobei sich ergab, daß dieser Einfluß im allgemeinen nur gering ist.

Zur Prüfung der abgeleiteten Formeln für den Reibungsbeiwert wurden Druckabfallmessungen in einem schraubenförmigen Kanal vorgenommen, der um die Schraubenachse rotierte. Dabei ergab sich in dem *Re*-Zahlbereich, in dem die Strömung noch laminar war, eine sehr gute Übereinstimmung mit den Rechnungen. Aber auch in dem *Re*-Zahlbereich, in dem die Strö-

mung bei der Messung bereits turbulent war, stimmten die gemessenen Reibungsbeiwerte noch gut mit denen aus der Rechnung für laminare Strömung ermittelten überein. Der Grund für diese ungewöhnliche Tatsache liegt darin, daß zunächst nur der Kern turbulent wird, was keinen großen Einfluß auf den Druckabfall hat, da ja bei der Kernströmung die Wirkung der Zähigkeit und damit der Turbulenz nur gering ist. Ein wesentlicher Einfluß der Turbulenz auf den Reibungsbeiwert ist erst dann zu erwarten, wenn auch die Grenzschicht an den Seitenwänden turbulent wird, was aber erst bei erheblich höheren *Re*-Zahlen eintritt als das Turbulentwerden der Kanalströmung im nicht rotierenden System. Die Messungen geben ferner Aufschluß über den Reibungsbeiwert in denjenigen Bereichen, in denen die Voraussetzungen der Rechnung nicht mehr gelten.

(Aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung.)

Anschrift des Verfassers: *Dr. H. Ludwieg*, Göttingen, Böttingerstr. 6/8.

(Eingegangen am 16. Februar 1951.)

Strömung im Übergangsraum der Wasserturbinen.

Von M. Strscheletzky.

1. Einleitung. Die Umströmung der Laufschaufeln bestimmt im wesentlichen die Arbeit der Wasserturbinen und hängt bekanntlich von dem Geschwindigkeitsfeld derjenigen Strömung ab, die im Übergangsraum zwischen dem Leitapparat und dem Laufrad auftritt und durch die Leitschaufeln gesteuert wird. Daraus ergibt sich eine für den Turbinenbau sehr wichtige Aufgabe, die Strömung im Rotationshohlraum hinter dem Leitapparat zu untersuchen und unter Berücksichtigung der Form des Turbinengehäuses und der Bauart der Leit- bzw. Laufschaufeln rechnerisch zu ermitteln. Die genaue Lösung dieses Problems ist meist mit der dreidimensionalen Analyse der Strömung verknüpft, die eine derart umfangreiche Rechenarbeit mit sich bringt, daß die Möglichkeit einer praktischen Anwendung des Verfahrens fraglich wird.

Die vorliegende Abhandlung ist einer annähernden Methode gewidmet, die wesentlich einfacher ist als die exakte dreidimensionale Analyse. Die durchgeführte experimentelle Nachprüfung der Berechnungsergebnisse hat gezeigt, daß die nach diesem annähernden Verfahren errechneten Strömungen mit den wirklichen Strömungen im Turbinenhohlraum sehr gut übereinstimmen. Hier wird nur die Strömung betrachtet, die hinter dem Leitapparat im Turbinenhohlraum o h n e L a u f r a d entsteht. Die für die experimentelle Nachprüfung des Verfahrens notwendigen Versuche wurden in der Hydraulischen Versuchsanstalt der Maschinenfabrik J. M. Voith G. m. b. H. (Heidenheim) durchgeführt. Für die Genehmigung, diese Abhandlung zu veröffentlichen, bin ich der Leitung der Maschinenfabrik J. M. Voith und insbesondere Herrn Direktor *Dr.-Ing. H. F. Canaan* zu Dank verpflichtet.

2. Leitapparat in zweidimensionaler Strömung. Wir wollen zunächst den einfachsten Fall betrachten und nehmen an, daß z_l gleiche Leitschaufeln ein Kreisgitter bilden, das sich in einer zweidimensionalen (ebenen) Strömung einer reibungslosen, volumenbeständigen Flüssigkeit befindet. Die Strömung ist weit weg von der Gitterachse rotationssymmetrisch und radial nach der Achse hin gerichtet. Unter der Wirkung von Leitschaufeln ändert die Strömung ihren Drall von $r\bar{c}_{0u}$ (vor dem Gitter) bis auf $r\bar{c}_{1u}$ (hinter dem Gitter), wobei $\bar{c}_u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_u\, d\varphi$ die mittlere Umfangskomponente der Geschwindigkeit und r die Entfernung von der Gitterachse bedeuten.

Obwohl eine unmittelbare Analyse der Strömung im Gebiet des Kreisgitters möglich ist[1], ist es im betreffenden Falle für praktische Zwecke angenehm, das Kreisgitter in ein gerades, unendliches Schaufelgitter konform abzubilden und zuerst die Wirkung dieses Gitters auf die zweidimensionale Strömung zu ermitteln[2]. Da die reibungslose Umströmung von geraden, unendlichen Gittern, deren Schaufeln praktisch beliebige Form haben können, gut bekannt ist, erhält man damit eine rechnerische Lösung der beiden in der Praxis vorkommenden Aufgaben und zwar:

a) Ermittlung der Wirkung eines gegebenen Kreisgitters auf die Strömung reibungsloser, volumenbeständiger Flüssigkeit, und

b) Ermittlung der Profilform des Kreisgitters, dessen Wirkung auf die Strömung vorgeschrieben ist.

3. Leitapparat in dreidimensionaler Strömung. Die unter 2. gezeigte exakte Methode zur Berechnung des Leitapparates findet im Turbinenbau wenig Anwendung, weil nur eine verhältnismäßig geringe Gruppe der langsamlaufenden Francis-Turbinen mit solchen Leitapparaten ausgerüstet wird, deren Form die Anwendung der zweidimensionalen Analyse erlaubt. Die Leitapparate der schnellaufenden Francis-Turbinen und insbesondere der Propeller- bzw. Kaplan-Turbinen werden meist direkt neben dem Übergangskrümmer des Turbinenhohlraumes eingebaut. Die Leitschaufeln dieser Turbinen befinden sich also in einer Strömung, die keinesfalls als eine zweidimensionale Bewegung betrachtet werden kann, weil alle drei Komponenten der

[1] *Fr. Staufer*, Wasserkraft und Wasserwirtschaft, Bd. 31. (1936), S. 212; *A. Betz* u. *J. Flügge-Lotz*, Ing.-Arch. 9 (1938), S. 486.

[2] Vgl. *A. Betz*, Konforme Abbildung, Berlin 1948.

lokalen Geschwindigkeit im Schaufelraum des Leitapparates von gleicher Größenordnung sind. Da für die Entwicklung gerade dieser Turbinentypen eine verfeinerte Analyse der Strömung im Turbinenhohlraum zwischen dem Leitapparat und dem Laufrad nötig ist, scheint es wichtig, eine Methode zur Berechnung des Leitapparates zu finden, welche die dreidimensionale (räumliche) Umströmung der Leitschaufeln berücksichtigt. Nur an Hand einer solchen Berechnungsmethode kann man die durch Leitschaufeln gesteuerte Strömung im Übergangsraum zwischen dem Leitapparat und dem Laufrad richtig rechnerisch erfassen und ausführlich analysieren.

Die Stromlinien einer stationären Strömung im Leitapparatraum der schnellaufenden Wasserturbinen bilden winkelperiodische Rotationsflächen mit der Winkelperiodizität $2\pi/z_l$. Die lokale Geschwindigkeit im Punkt A einer Stromfläche f_k ist $c = \sqrt{c_m^2 + c_u^2}$, wobei c_m die Meridionalkomponente und c_u die Umfangskomponente der lokalen Geschwindigkeit c bedeuten.

Wir denken uns ein orthogonales Netz auf der Stromfläche f_k, welches aus den Stromlinien l_m der Meridionalströmung und aus den Normallinien n besteht. Die zwei nebeneinander liegenden Stromflächen f_k und f_{k+1} bilden eine gekrümmte Stromschicht, deren lokale Dicke m durch die Form dieser Stromflächen bestimmt wird und als eine Funktion $m\,(l_m, n)$ der Koordinaten l_m, n betrachtet werden kann. Wir wollen annehmen, daß die lokale Dicke $m\,(l_m, n)$ der Stromschicht im Vergleich zu den Krümmungsradien der Stromflächen, die diese Schicht abgrenzen, genügend klein ist.

Es ist bekannt[1], daß eine konforme Abbildung der Strömung in gekrümmter Schicht in eine zweidimensionale, ebene Strömung nur in dem Falle möglich ist, wenn die betreffende gekrümmte Stromschicht eine gleichförmige Dicke $m = \text{konst.}$ hat. Für diese konforme Abbildung gilt die Gleichung

$$\Gamma = \oint_s c\,ds = \oint_{s'} c'\,ds' = \Gamma' . \tag{1}$$

Hierbei bedeuten Γ die Zirkulation der Geschwindigkeit c um eine geschlossene Kontur s auf der Stromfläche f_k und Γ' die Zirkulation der Geschwindigkeit c' um die geschlossene Kontur s' auf der Ebene (x, y), welche eine konforme Abbildung der Stromfläche f_k darstellt.

Die orthogonalen Komponenten c'_x und c'_y der Geschwindigkeit c' auf der (x, y)-Ebene erhält man aus den Gleichungen

$$c_u = c'_x\,\Theta , \qquad c_m = c'_y\,\Theta , \tag{2}$$

wobei $\Theta\,(l_m, n)$ eine stetige Abbildungs-Funktion bedeutet.

Es ist nicht möglich, eine Strömung, welche gekrümmte Stromschichten von nichtgleichförmiger Dicke $m\,(l_m, n)$ bildet, in eine zweidimensionale, ebene Strömung konform abzubilden. Es ist also nicht möglich, die Umströmung eines ebenen, unendlichen Schaufelgitters als konforme Abbildung der Strömung in der gekrümmten Stromschicht des Leitschaufelraumes zu betrachten, wenn diese letztere keine gleichförmige Dicke hat. Für praktische Zwecke ist es aber angenehm, den Leitapparat auf Grund der Gittertheorie mindestens annähernd zu berechnen, weil dadurch die Rechenarbeit wesentlich vereinfacht und verkürzt werden kann.

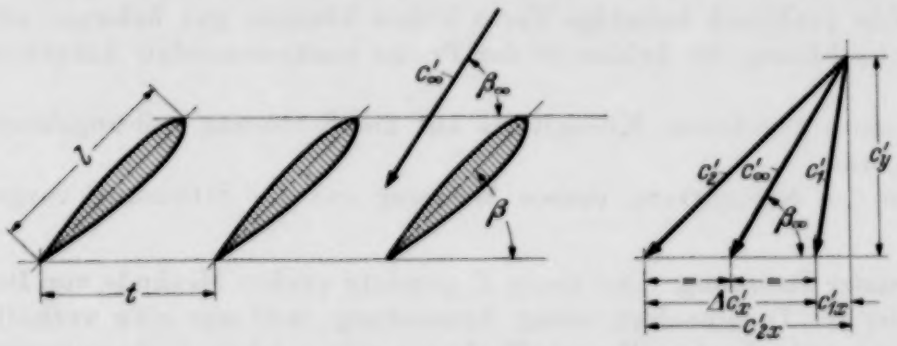

Abb. 1. Gerades, unendliches Schaufelgitter.

Bei der Ermittlung der Wirkung von Leitschaufeln auf die Strömung im Übergangsraum ist es wichtig, die durch die Leitschaufeln hervorgerufene Zirkulation $\Gamma_1 = 2\pi r c_{1u}$ zu ermitteln. Die Zirkulation der Strömung vor den Leitschaufeln sei Γ_0. Damit ergibt sich die Zirkulation um eine jede Leitschaufel

$$\Gamma = (\Gamma_1 - \Gamma_0)/z_l .$$

Wir wollen zunächst eine Stromschicht im Leitschaufelraum betrachten, deren Dicke $m\,(l_m, n)$ zwar nicht gleichförmig ist, sich aber so wenig ändert, daß der Ersatz der betreffenden Schicht durch eine Schicht von gleichförmiger Dicke $m = \text{konst}$ ohne weiteres zulässig ist. Die Strömung in dieser letzteren Schicht samt der Leitschaufelprofile kann man in die Ebene (x, y) konform abbilden. Damit erhält man eine zweidimensionale Umströmung eines geraden, unendlichen Gitters, welches die Teilung t, die Profillänge l und den Neigungswinkel β hat

[1] Vgl. *H. Lamb*, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 114 u. 115. Leipzig 1931.

(Abb. 1). Aus der bekannten Formel

$$\Gamma'' = \frac{c_{ag}}{2} c'_\infty l = \frac{a \sin(\beta_\infty - \beta) + b}{2} c'_\infty l \tag{3}$$

ergibt sich (vgl. Abb. 1)

$$\left.\begin{aligned} \Delta c'_x = \frac{\Gamma}{t} = \frac{p\,a\,(c'_y \cos\beta - c'_{1x} \sin\beta) + \frac{b^2}{4} c'_{1x} + }{2\left(p^2 - \frac{b^2}{16}\right)} \\ + b \sqrt{p^2 (c'^2_{1x} + c'^2_y) - c'^2_y \frac{b^2}{16} + \frac{a^2}{16}(c'_y \cos\beta - c'_x \sin\beta)^2 + p\,a\,(c'_y \cos\beta - c'_{1x} \sin\beta) \frac{c'_{1x}}{2}} \\ 2\left(p^2 - \frac{b^2}{16}\right) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wobei $c_{ag} = a\alpha + b$ die Auftriebzahl der Gitterschaufel, α den Anstellwinkel,

$$p = \frac{t}{l} + \frac{a}{4} \sin\beta,$$

$$\sin\beta_\infty = \frac{c'_y}{c'_\infty}, \qquad \cos\beta_\infty = \frac{c'_{1x} + \frac{\Delta c'_x}{2}}{c'_\infty}$$

$$c'_\infty = \sqrt{\left(c'_{1x} + \frac{\Delta c'_x}{2}\right)^2 + c'^2_y}$$

bedeuten. Durch c'_∞ ist wie üblich die Geschwindigkeit der von den Gitterschaufeln nicht gestörten Strömung bezeichnet. β_∞ bedeutet den Neigungswinkel von c'_∞ zu der Gitterachse (x).

Die Umströmung der geraden, unendlichen Gitter mit reibungsloser volumenbeständiger Flüssigkeit ist gut bekannt. Die Parameter a und b hängen nicht nur von der Bauart des Gitters (t/l, β) ab, sondern auch von der Form der Schaufelgestalt (Wölbung der Schaufelmittellinie und Verlauf der Dicke δ längs der Schaufelsehne l). Diese Parameter kann man bekanntlich mit einer Genauigkeit ermitteln, die für praktische Zwecke völlig ausreicht [1].

Für die weitere Berechnung ist es angenehm, annähernd anzunehmen, daß

$$c'_\infty = \sqrt{\left(c'_{1x} + \frac{\Delta c'_x}{2}\right)^2 + c'^2_y} \approx A_1 \left(c'_{1x} + \frac{\Delta c'_x}{2}\right) + A_2\, c'_y \tag{5}$$

ist [2]. Damit ergibt sich aus der Formel (3)

$$\Gamma'' = \Delta c'_x\, t \approx \frac{\left(\frac{a}{2}\cos\beta + A_2 \frac{b}{2}\right) c'_y + \left(-\frac{a}{2}\sin\beta + A_1 \frac{b}{2}\right) \cdot c'_{1x}}{1 + \frac{l}{t}\frac{a}{4}\sin\beta - \frac{A_1}{4}\frac{l}{t} b} l = B_1\, c'_y + B_2\, c'_{1x}, \tag{6}$$

wobei

$$B_1 = \frac{\left(\frac{a}{2}\cos\beta + A_2 \frac{b}{2}\right) l}{1 + \frac{l}{t}\frac{a}{4}\sin\beta - \frac{A_1}{4}\frac{l}{t} b}, \qquad B_2 = \frac{\left(-\frac{a}{2}\sin\beta + A_2 \frac{b}{2}\right) l}{1 + \frac{l}{t}\frac{a}{4}\sin\beta - \frac{A_1}{4}\frac{l}{t} b}$$

bedeuten. Die Beiwerte B_1 und B_2 hängen nur von der Bauart des Gitters (t/l, β) und der Schaufelform (relative Wölbung, relative Dicke), aber nicht von der Anströmung ab.

---

[1] Von den bis jetzt veröffentlichten Arbeiten über die angenäherte Berechnung von geraden, unendlichen Schaufelgittern möchte ich hier auf die Abhandlung von *V. Lieblein*, Ing.-Arch. 18 (1950), S. 281 hinweisen. (Vgl. auch „Berichte der Gittertagung in Braunschweig am 27. u. 28. März 1944", bis jetzt nicht veröffentlicht.)

[2] Vgl. Hütte I. S. 72, 27. Aufl. Man nimmt $A_1 = 0{,}960$ bzw. $A_2 = 0{,}398$ für $c'_{1x} + \frac{\Delta c'_x}{2} > c'_y$ und $A_1 = 0{,}398$ bzw. $A_2 = 0{,}960$ für $c'_{1x} + \frac{\Delta c'_x}{2} < c'_y$. Fehler kleiner als 4% des wirklichen Wertes von c'_∞.

Die konforme Abbildung der Stromfläche f_k auf die Ebene (x, y) wollen wir mittels der Funktion

$$\Theta = \frac{R}{r} \tag{7}$$

durchführen, wobei R eine konstante Zahl ist[1]. Die Funktion Θ ist offensichtlich überall stetig mit Ausnahme des Gebietes $r = 0$, wo sie gegen ∞ geht. Dieses Gebiet ist für die Berechnung des Leitapparates bedeutungslos.

Aus den Formeln (2) erhalten wir für eine Stromschicht von gleichförmiger Dicke $m = \text{konst}$

$$c'_y = \frac{c_m}{\Theta} = \frac{\Delta Q}{2\pi R}\,\frac{1}{m} = \text{konst}\,, \tag{8}$$

$$c'_{1x} = \frac{c_{0u}}{\Theta} = \frac{\Gamma_0}{2\pi R} = \text{konst}\,, \tag{9}$$

$$c'_{2x} = \frac{c_{1u}}{\Theta} = \frac{\Gamma_1}{2\pi R} = \text{konst}\,, \tag{10}$$

$$\Delta c'_x = c'_{2x} - c'_{1x} = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_0}{2\pi R}\,, \tag{11}$$

wobei ΔQ die sekundliche Durchflußmenge durch die betreffende gekrümmte Schicht ist.

Ändert man jetzt die gleichförmige Dicke der gekrümmten Schicht von m bis auf m', so ergibt sich aus (8) für $\Delta Q = \text{Konst}$

$$\frac{(c'_y)'}{c'_y} = \frac{m}{m'}\,. \tag{12}$$

Entspricht der Dicke m' die Geschwindigkeitskomponente $(c'_y)'$ und die Zirkulation $(\Gamma')'$, so erhalten wir aus (6)

$$\frac{(c'_y)'}{c'_y} \approx \frac{(\Gamma')' - B_2\, c'_{1x}}{\Gamma' - B_2\, c'_{1x}}\,,$$

weil $(c'_{1x})' = c'_{1x}$ ist [vgl. (9)]. Daraus ergibt sich

$$(\Gamma')' \approx \Gamma' \frac{(c'_y)'}{c'_y} + B_2\, c'_{1x}\left[1 - \frac{(c'_y)'}{c'_y}\right] = \Gamma' \frac{m}{m'} + B_2\, c'_{1x}\left(1 - \frac{m}{m'}\right). \tag{13}$$

Die Stromflächen im Leitapparatraum der schnellaufenden Wasserturbinen bilden meist gekrümmte Schichten, die eine derart starke Änderung ihrer Dicke $m\,(l_m, n)$ längs der meridionalen Koordinate l_m aufweisen, daß der oben erwähnte Ersatz der betreffenden Schicht durch eine Schicht von gleichförmiger Dicke unzulässig ist.

In diesem Falle muß man die betreffende Schicht in soviel ringförmige „Elemente" teilen, daß für jedes Element die „mittlere" Dicke $m\,(l_m)$ als eine gleichförmige Dicke der Schicht ohne weiteres betrachtet werden kann. Entspricht ein jedes Element dem Zuwachs Δl_m der Koordinate l_m, so ist die „mittlere" Dicke der ganzen Schicht

$$m_m \approx \frac{1}{l_m} \sum_1^n m\,(l_m)\,\Delta l_m\,, \tag{14}$$

wobei n die Zahl der Elemente Δl_m bedeutet. Ein Element Δl_m der Leitschaufel erzeugt den Zirkulationszuwachs $\Delta\Gamma$, so daß $\Gamma = \sum_1^n \Delta\Gamma$ ist. Die Zirkulation um eine jede Leitschaufel, die der Umströmung von Leitschaufeln in der Schicht von gleichförmiger Dicke m_m entspricht, kann man nach der Formel (13) angenähert ermitteln.

Aus der Formel (13) erhalten wir für ein Element Δl_m

$$\Delta\Gamma \approx \Delta\Gamma' \frac{m_m}{m} - B_2\, c'_{1x}\left(\frac{m_m}{m} - 1\right)$$

[1] Vgl. *Prašil*, Technische Hydrodynamik, S. 287 bis 303. Berlin 1926.

und für die ganze Leitschaufel

$$\Gamma \approx \sum_{1}^{n} \Delta\Gamma' \frac{m_m}{m} - B_2 c'_{1x} \left(\frac{m_m}{m} - 1\right)_m , \tag{15}$$

wobei $\left(\frac{m_m}{m} - 1\right)_m$ den „mittleren" Wert von $\frac{m_m}{m} - 1$ für die betreffende Schicht bedeutet. $\Delta\Gamma' = f(l)$ ist für das gerade, unendliche Schaufelgitter in der (x, y)-Ebene bekannt.

4. Vom Leitapparat gesteuerte Strömung im Rotationshohlraum. Aus der Analyse der Umströmung von Leitschaufeln kann man folgern, daß die Verteilung der von den Leitschaufeln erzeugten Zirkulation Γ über die Breite B des Leitapparates, d.h. die Funktion $\Gamma(B)$, sowohl von der Bauart der Leitschaufeln als auch von der Form des Turbinenhohlraumes abhängt. Es ist also durchaus möglich, daß die Zirkulation Γ keinen konstanten Wert längs der Breite B aufweist, sondern eine stetige Funktion $\Gamma(B)$ darstellt.

Eine Umströmung von Leitschaufeln, welche eine nicht konstante Zirkulation $\Gamma(B) \neq$ konst erzeugt, ist bekanntlich mit der Bildung von freien Wirbeln verbunden, die hinter jeder Leitschaufel eine freie Wirbelfläche bilden. Da die Zahl z_l der Leitschaufeln meist ziemlich groß ist, kann man voraussetzen, daß der Ersatz der z_l freien Wirbelflächen durch eine kontinuierliche rotationssymmetrische Verteilung der freien Wirbel im Rotationshohlraum hinter dem Leitapparat durchaus zulässig ist.

Wir können also annehmen, daß die Strömung im Turbinenhohlraum als eine rotationssymmetrische, stationäre Bewegung betrachtet werden kann, wobei die Verteilung der freien Wirbel in Richtung quer zu den Stromflächen durch die Funktion $\Gamma(B)$ bekannt ist. Die betreffende Strömung kann also entweder wirbelfrei sein, oder die freien Wirbel enthalten, die mit den Stromlinien der Bewegung zusammenfallen und rotationssymmetrisch verteilt sind.

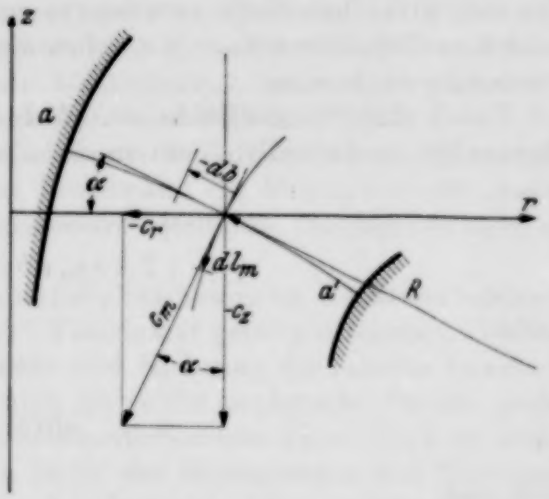

Abb. 2. Strömung im Übergangsraum der Wasserturbine.

Die Grundgleichungen einer rotationssymmetrischen Strömung reibungsfreier, volumenbeständiger Flüssigkeit lauten

$$\left.\begin{aligned} c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} + c_r \frac{\partial c_z}{\partial r} &= -g + \Sigma q_z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}, \\ c_z \frac{\partial c_r}{\partial z} + c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} - \frac{c_u^2}{r} &= \Sigma q_r - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ c_z \frac{\partial c_u}{\partial z} + c_r \frac{\partial c_u}{\partial r} + \frac{c_u c_r}{r} &= \Sigma q_u . \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Hierin bedeuten q die den Massenkräften (ausgenommen der Erdschwere) entsprechenden Beschleunigungswerte, p den lokalen Druck, und $c(c_z, c_r, c_u)$ die lokale Geschwindigkeit[1]. Die Gleichungen (16) sind auf das zylindrische Koordinatensystem (r, z, Θ) bezogen.

Wir bezeichnen wie früher durch $c_m = \sqrt{c_r^2 + c_z^2}$ die meridionale Komponente der lokalen Geschwindigkeit und erhalten damit (Abb. 2)

$$\left.\begin{aligned} c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} + c_r \frac{\partial c_z}{\partial r} &= -g + \frac{c_m^2}{R}\sin\alpha - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}, \\ c_z \frac{\partial c_r}{\partial z} + c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} - \frac{c_u^2}{r} &= -\frac{c_m^2}{R}\cos\alpha - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ c_z \frac{\partial c_u}{\partial z} + c_r \frac{\partial c_u}{\partial r} + \frac{c_u c_r}{r} &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Sämtliche Stromlinien, die innerhalb des Turbinenhohlraumes liegen, haben ihren Anfang in einem Wasserbehälter, in dem die Geschwindigkeiten derart klein sind, daß ihre Quadrate

[1] $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ — Dichte.

vernachlässigt werden können. Damit erhalten wir aus (17) nach einigen Umbildungen

$$c_m\,dc_m-\frac{c_m^2}{R}\,db+c_u\,dc_u+\frac{c_u^2}{r}\,dr=0\,, \tag{18}$$

wobei db ein Element der zu den Stromflächen senkrechten Linie bedeutet. Wir bezeichnen

$$c_u\frac{\partial c_u}{\partial b}+\frac{c_u^2}{r}\frac{dr}{db}=f(b)$$

und integrieren (18) längs der Normallinie aa' (Abb. 2). Damit ergibt sich

$$c_m=e^{\int_0^b\frac{db}{R(b)}}\sqrt{c_{0m}^2-2\int_0^b f(b)\,e^{-2\int_0^b\frac{db}{R(b)}}\,db}\,, \tag{19}$$

wobei c_{0m} dem Punkt a $(b=0)$ entspricht.

Bei der Berechnung der Meridionalkomponente c_m nach (19) kann die Funktion $f(b)$ als ein gegebener Parameter betrachtet werden, wobei die Komponente c_u aus der Wirkung des Leitapparates, der ja die Strömung steuert, zu ermitteln ist. Dabei muß man beachten, daß für eine wirbelbehaftete, rotationssymmetrische Strömung die Gleichung $c_u r=$ konst längs ein und derselben Stromlinie gilt, aber nicht für die ganze Strömung, wie es im Falle wirbelfreier Strömung vorkommt.

Durch eine Normalfläche aa' (Abb. 2), die im Falle einer wirbelbehafteten Strömung keine Niveaufläche darstellt, fließt in der Zeiteinheit die Flüssigkeitsmenge

$$Q=\int_0^b 2\pi\,r c_m\,db=2\pi\int_0^b r\,e^{\int_0^b\frac{db}{R(b)}}\sqrt{c_{0m}^2-\Phi(b)}\,db\,, \tag{20}$$

wobei

$$\Phi(b)=2\int_0^b f(b)\,e^{-2\int_0^b\frac{db}{R(b)}}\,db$$

bedeutet.

Da die meridionale Komponente c_m der wirbelbehafteten Strömung nicht nur von der Form des Rotationshohlraumes abhängt, sondern eine Funktion der Umfangskomponente c_u darstellt, muß man bei der Auswertung (20) eine bestimmte sekundliche Durchflußmenge Q im Auge behalten. Die Lösung von (20) findet man nach den bekannten Methoden der numerischen Integration, weil die unter dem Integralzeichen dieser Gleichung stehende Funktion im ganzen Integrationsbereich stetig ist.

Um mit möglichst wenigen Werten der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion auskommen zu können, wenden wir die *Gauß*sche Formel[1] an und erhalten damit

$$Q\approx 2\pi\,b\sum_{k=1}^{k}A_k\left[r\,e^{\int_0^b\frac{db}{R(b)}}\sqrt{c_{0m}^2-\Phi(b)}\right]_k\,, \tag{21}$$

wobei die in Klammern stehende Funktion den k *Gauß*schen Abszissen entspricht. A_k sind die *Gauß*schen Koeffizienten. Aus (21) ergibt sich die Komponente c_{0m} der Geschwindigkeit an der Stelle $b=0$.

Nach der Einführung des ermittelten Wertes von c_{0m} in (20) erhält man mittels tabellarischer Integration den Verlauf der Funktion $Q(b)/2\pi=\varphi(b)$, welcher in Koordinaten $Q(b)/2\pi$, b graphisch dargestellt werden kann.

Um die Schnittpunkte der Stromlinien mit der betreffenden Normallinie aa' zu ermitteln, teilt man die Endordinate der $Q(b)/2\pi$-Kurve in ebenso viele gleiche Teile, als Teilströmungen vorgesehen sind. Man findet dann die entsprechenden Teilpunkte der $Q(b)/2\pi$-Kurve und ermittelt ihre Abszissen. Diese letztere stellen die gesuchten Teilungen der Normallinie aa' dar.

Da zu Beginn der Berechnung die Funktion $R(b)$ nur für die Grenzflächen des Rotationshohlraumes bekannt ist, findet man die Lösung von (20) mittels der Methode der sukzessiven Approximation.

[1] Vgl. *C. Runge* und *H. König*, Numerisches Rechnen, S. 275. Berlin 1924.

5. „Nabentotwasser" in rotationssymmetrischen Strömungen. Reibungsfreie rotationssymmetrische Strömungen, deren lokale Geschwindigkeit überall meridional gerichtet ist und folglich keine Umfangskomponente hat ($c_u = 0$), werden bekanntlich nur durch die Wände des betreffenden Rotationshohlraumes gesteuert und weisen keine Ablösungen von der Wandoberfläche auf. Diese letzteren können in diesem Falle nur unter dem Einfluß der Zähigkeit in der Grenzschicht entstehen.

Rotationssymmetrische Strömungen der reibungsfreien Flüssigkeit, bei denen $c_u \neq 0$ ist (die sogenannten „Drallströmungen"), werden nicht nur durch die Form des Rotationshohlraumes, sondern auch durch die Verteilung des Dralls (rc_u) gesteuert.

Die Flüssigkeitsteilchen einer rotationssymmetrischen Drallströmung werden stets in Richtung der Achse beschleunigt. Das ist nur dann möglich, wenn in Richtung der Außenwand ein entsprechender Druckgradient vorhanden ist. Daraus kann man folgern, daß die Stelle des tiefsten Druckes an der Innenwand bzw. an der Achse des Rotationshohlraumes liegen muß.

Der lokale Druck innerhalb der Drallströmung wird durch die lokale Geschwindigkeit $c = \sqrt{c_u^2 + c_m^2}$ bestimmt und hängt folglich nicht nur von der innerhalb der Drallströmung vorhandenen Drallverteilung, sondern auch von der Form des Rotationshohlraumes ab. Daraus kann man folgern, daß im betreffenden Rotationshohlraum nur diejenigen Drallströmungen möglich sind, die der erwähnten Verteilung des Druckgradienten in Richtung der Außenwand entsprechen. Das Geschwindigkeitsfeld dieser Strömungen wurde unter 4 ausführlich analysiert.

Der an der Innengrenze der Strömung herrschende Gesamtdruck kann nicht tiefer sein, als der Druck p_0 im Abflußraum, wo die Geschwindigkeiten verschwindend klein sind. Entspricht die betreffende Drallverteilung dieser Bedingung nicht, so wird die Strömung gezwungen, ihre Innengrenze zu korrigieren. Dabei entsteht an der Innenwand ein Raum, der mit „toter" Flüssigkeit gefüllt ist. Die Oberfläche dieses „Nabentotwassers" stellt die Innengrenzfläche der rotationssymmetrischen Drallströmung dar.

Es ist einleuchtend, daß der Einfluß des Totwassers auf die Strömung im Rotationshohlraum von den Abmessungen und von der Form des mit „toter" Flüssigkeit gefüllten Raumes abhängt. Das „Nabentotwasser" kann also unter Umständen Größe und Richtung der lokalen Geschwindigkeiten der Strömung wesentlich beeinflussen. Deshalb ist es für praktische Zwecke außerordentlich wichtig, die Entstehung und die Form des Nabentotwassers theoretisch zu analysieren und eine Rechenmethode zu finden, mit deren Hilfe die Bedingungen der Totwasserbildung in Strömungsmaschinen rechnerisch erfaßt werden können. Die Analyse wollen wir auf Grund der unter 4 dargelegten Theorie rotationssymmetrischer Strömungen durchführen.

Aus (17) folgt, daß längs einer jeden Stromlinie l_m der meridionalen Strömung die Gleichung

$$c_m\, dc_m + g\, dl_m \cos\alpha + d\left(\frac{p}{\varrho}\right) + \frac{c_u^2}{r}\, dl_m \sin\alpha = 0 \tag{22}$$

gilt. Die Oberfläche des Nabentotwassers kann als eine Trennfläche zwischen der rotationssymmetrischen Strömung der reibungsfreien Flüssigkeit und dem Raum, wo sich die Flüssigkeit in Ruhe befindet, betrachtet werden. Daraus kann man folgern, daß überall auf der Oberfläche des Nabentotwassers der gleiche Druck herrscht. Damit erhalten wir aus (22) für $gl_z + p/\varrho = \text{konst}$, daß die Gleichung

$$c_{im}\, dc_{im} + \frac{c_{iu}^2}{r_i}(-dl_r) = 0$$

für die ganze Trennfläche $r_i(z)$ gilt. Die Integration dieser Gleichung von z_1 bis z_2 ergibt

$$c_{im}^2 + c_{iu}^2 = A_T\,,$$

wobei A_T — die Integrationskonstante bedeutet und c_{im} bzw. c_{iu} — die Komponenten der lokalen Geschwindigkeit c_i an der Trennfläche darstellen.

Da die Trennfläche als eine Stromfläche der rotationssymmetrischen Strömung betrachtet werden kann, ist für die ganze Trennfläche $c_{iu} = \Gamma_i/2\pi r_i$. Damit erhalten wir

$$c_{im}^2 + \frac{\Gamma_i^2}{4\pi^2}\,\frac{1}{r_i^2} = A_T\,. \tag{23}$$

Diese Gleichung bestimmt eindeutig die Form des Nabentotwassers, wenn die c_{im}-Verteilung über der Trennfläche und die Konstante A_T bekannt sind.

Um die der betreffenden Strömung entsprechende Konstante A_T zu ermitteln, betrachten wir einen Querschnitt des gegebenen Rotationshohlraumes, welcher hinter dem Übergangsraum liegt. Die meridionale Komponente der lokalen Geschwindigkeit an der Trennfläche r_i im betreffenden Querschnitt sei

$$c_{im} = \varkappa [c_a]_m .$$

Die Größe

$$[c_a]_m = \frac{Q}{\pi (R^2 - r_i^2)}$$

bedeutet die „mittlere" achsiale Geschwindigkeit im betreffenden Querschnitt $R - r_i$ des Rotationshohlraumes; $\varkappa$ ist ein Beiwert.

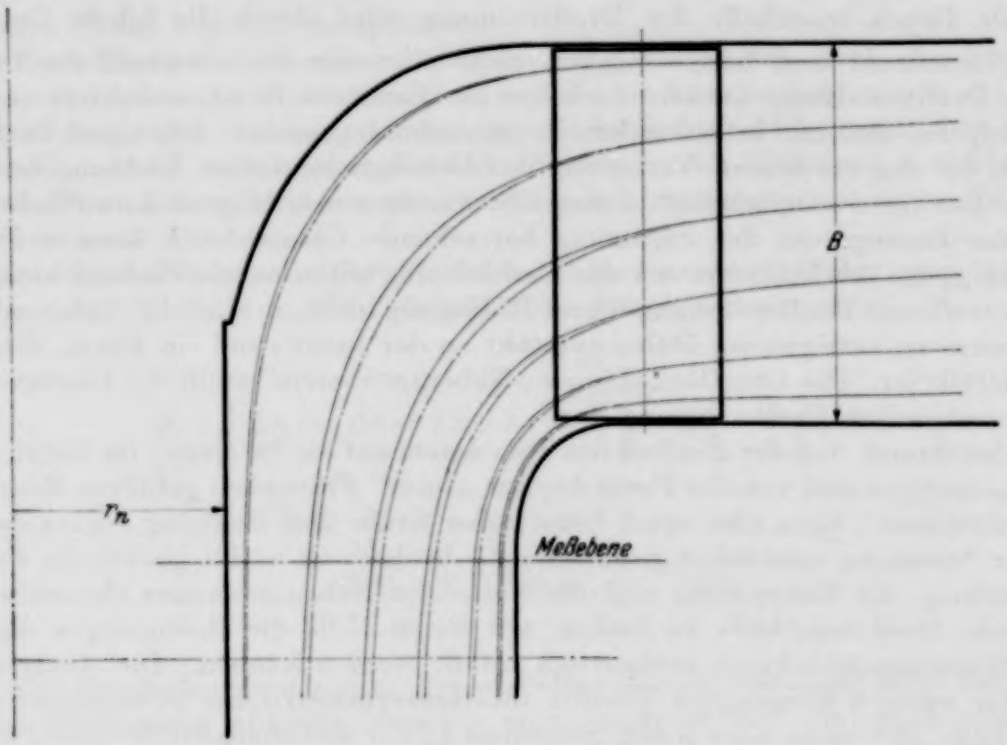

Abb. 3. Strombild bei der Leitapparatöffnung $a_0 = 30$ mm.
——— wirbelbehaftete Strömung; — · — · — Potentialströmung ($c_u \cdot r = 0$).

Bei einem freien Abfluß der reibungslosen, volumenbeständigen Flüssigkeit in einen Raum, wo der Druck p_0 herrscht und die Geschwindigkeit $c_0 \approx 0$ ist, entspricht der lokale Druck p_i an der Trennfläche der Gleichung

$$\frac{p_i}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} - \frac{1}{2g}(c_{iu}^2 + c_{im}^2) = \frac{p_0}{\gamma} - \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{\Gamma_i}{2\pi r_i}\right)^2 + \left(\frac{\varkappa Q}{\pi (R^2 - r_i^2)}\right)^2\right]. \tag{24}$$

Das Maximum von p_i/γ bzw. das Minimum von $(p_0 - p_i)/\gamma$, welches im betreffenden Rotationshohlraum zustande kommen kann, entspricht dem Radius r_i der Trennfläche. Aus der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{p_i}{\gamma}\right) = 0 \tag{25}$$

erhalten wir

$$r_i^6 + r_i^4\left[8\frac{\varkappa^2 Q^2}{\Gamma_i^2} - 3R^2\right] + 3R^4 r_i^2 - R^6 = 0 . \tag{26}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der gesuchte Wert von r_i, welcher dem angenommenen Beiwert $\varkappa$ entspricht. Ist $r_i < r_n$, wobei r_n der Nabenhalbmesser sei, so entsteht kein Totwasser; die Strömung liegt überall an der Nabenoberfläche an. Ist $r_i > r_n$, so bedeutet das, daß die betreffende Drallströmung nur mit einer Trennfläche, die das Totwasser abgrenzt, möglich ist.

In diesem Fall muß man den oben erhaltenen Wert von r_i präzisieren. Zu diesem Zweck pflegt man den Totwasserraum, der dem errechneten Wert von r_i entspricht, in erster Annäherung aufzuzeichnen und die Strömung zwischen dem Totwasser und der Außenwand nach der unter 4 angegebenen Methode zu korrigieren. Daraus ergibt sich ein neuer Wert von $\varkappa$, welcher in (26) eingeführt wird. Die Lösung dieser Gleichung ergibt dann die Größe von r_i in zweiter Annäherung. Die Berechnung wird solange fortgesetzt, bis zwei hintereinander folgende Annäherungen praktisch zusammenfallen. Die Berechnungen zeigen aber, daß das Verfahren sehr schnell konvergiert und zwei bis drei Annäherungen völlig ausreichen.

[Ist zwischen dem betreffenden Querschnitt des Rotationshohlraumes und dem Abflußraum ein Druckverlust $\Delta p/\gamma$ vorhanden (Reibungsverlust bei reellen Flüssigkeiten, Drosselung usw.), so entspricht der lokale Druck p_i' an der Trennfläche der Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_i'}{\gamma} &= \frac{p_i - \Delta p}{\gamma} = \\ \frac{p_0}{\gamma} &- \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{\Gamma_i}{2\pi r_i'}\right)^2 + \left(\frac{\varkappa Q}{\pi (R^2 - r_i'^2)}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \quad (24\,a)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Radius r_i' des Nabentotwassers, welcher dem Druckverlust Δp entspricht, wobei offensichtlich $r_i' < r_i$ ist.]

Nach der Ermittlung des Radius r_i errechnet man nach (23) die konstante A_T und die Form des Nabentotwassers, wobei die c_{im}-Werte für die betreffenden Punkte der Trennfläche r_i nach dem unter 4 angegebenen Verfahren errechnet werden sollen.

An der Stelle, wo $r_i = r_n$ ist, löst sich die reibungsfreie rotationssymmetrische Strömung von der Nabenoberfläche ab und bildet die Trennfläche zwischen der Strömung und dem mit „toter" Flüssigkeit gefüllten Raum.

Die Zähigkeit der reellen Flüssigkeiten von geringer Reibung (Wasser, Luft) macht sich bemerkbar in der Grenzschicht an der Wand und an der Trennfläche zwischen der Strömung und dem Nabentotwasser.

Die Verdrängungsdicke der Grenzschicht spielt im Übergangsraum der Wasserturbinen kaum eine bedeutende Rolle, weil die Strömung von der Leitschaufelwirkung ziemlich stark beeinflußt wird, und die Grenzschicht verhältnismäßig dünn bleibt. Die durch die Reibung hervorgerufene Ablösung von der Innenwand des Turbinenhohlraumes ist kaum möglich, weil die Umströmung der Innenwand zwischen dem Leitapparat und dem Nabentotwasser meist negativen Druckgradienten entspricht.

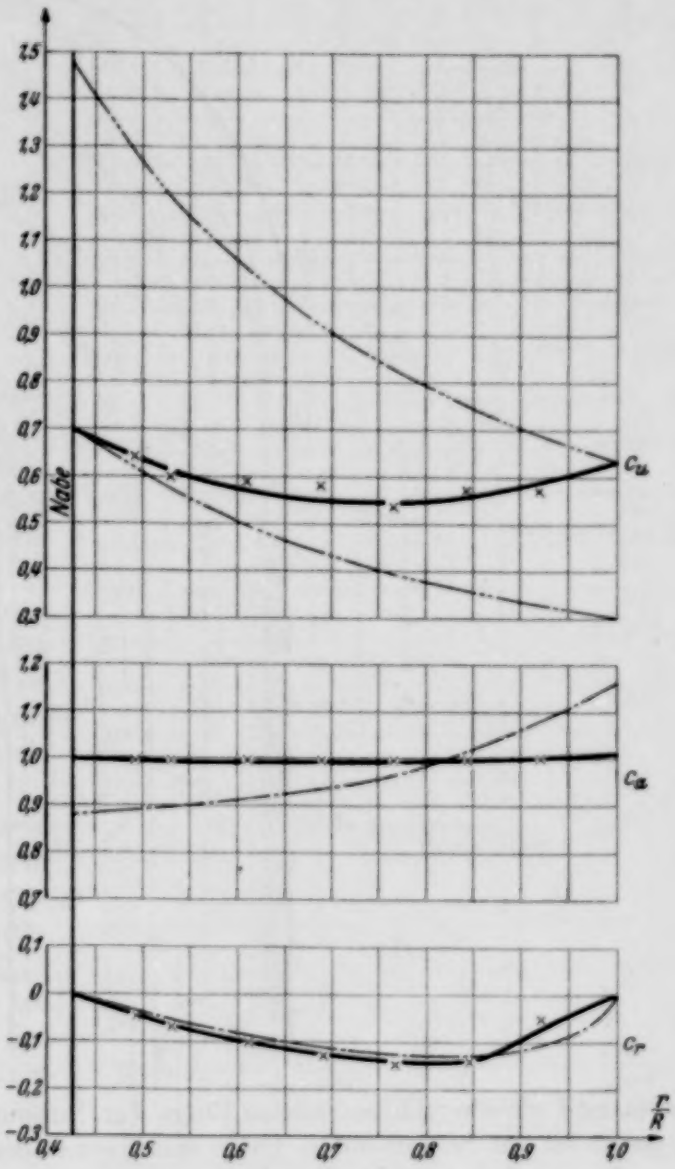

Abb. 4. Geschwindigkeitskomponenten c_u, c_a und c_r in der Meßebene (a_0 = 30 mm).

Wirbelbehaftete Strömung
Potentialströmung $c_u \cdot r = 0$
Potentialwirbel $c_u \cdot r$ = konst
} Theorie
× Versuch

Die durch die Reibung entstehenden Kräfte an der Trennfläche erzeugen im Totwasserraum sowohl meridionale als auch tangentiale Geschwindigkeitskomponenten. Die meridionale Komponente bildet eine Sekundärbewegung, welche die Flüssigkeit innerhalb des Totwasserraumes umwälzt. Die tangentiale Komponente zwingt das Totwasser zur Rotation mit einer fast konstanten Winkelgeschwindigkeit. Daraus kann man folgern, daß sich der Zähigkeitseinfluß auf die Bildung des Totwassers hauptsächlich dadurch bemerkbar macht, daß an Stelle der Trennfläche, die in der reibungslosen Flüssigkeit eine scharfe Grenze bildet, in der reibungsbehafteten Flüssigkeit eine gewisse „Übergangsschicht" entsteht.

Die durch den Reibungsverlust entstehende Einschnürung des Nabentotwassers [vgl. (24a)] spielt im betreffenden Falle kaum eine bedeutende Rolle weil der Energieverlust in dem relativ kurzen Rotationshohlraum meistens ziemlich klein ist[1].

6. Zahlenbeispiele und Vergleich mit den Versuchsergebnissen. Als ein Beispiel für die praktische Anwendung des Verfahrens wollen wir die Strömung im laufradlosen Rotationshohlraum einer Kaplan-Turbine berechnen. Die Strömung wird durch einen radialen Leitapparat gesteuert, der 24 verstellbare Leitschaufeln hat. Die Form des Turbinenhohlraumes ist auf den Abb. 3 und 5 dargestellt. Die Leitschaufeln haben ein symmetrisches Profil, welches gleiche

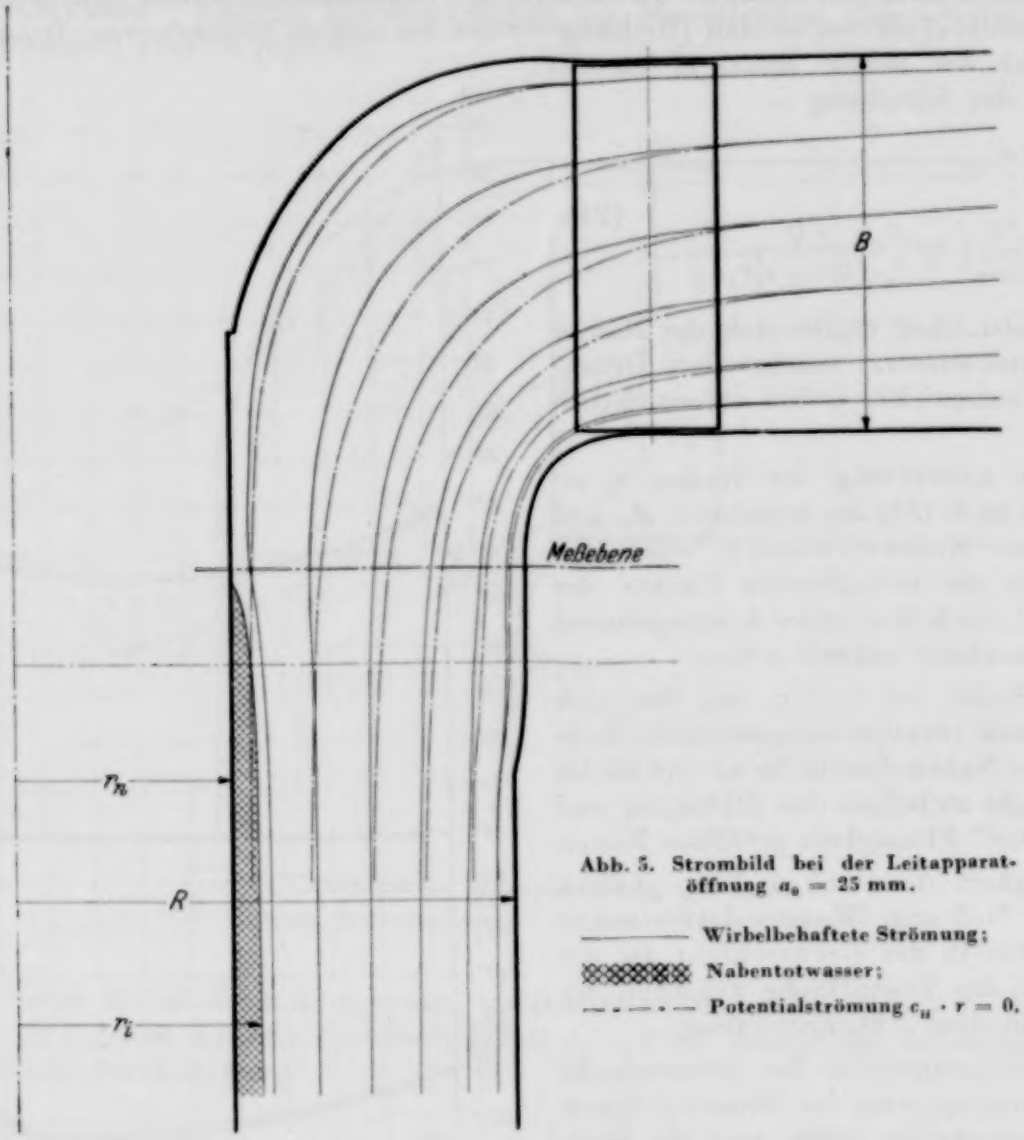

Abb. 5. Strombild bei der Leitapparatöffnung $a_0 = 25$ mm.

——— Wirbelbehaftete Strömung;

▩▩▩▩ Nabentotwasser;

— · — · — Potentialströmung $c_u \cdot r = 0$.

Form und gleiche Abmessungen längs der Schaufelbreite B hat. Die Strömung vor dem Leitapparat ist im betreffenden Falle meridional gerichtet ($c_{0u} = 0$, $\Gamma_0 = 0$). Hinter dem Übergangsraum sind die Wände zylindrisch ($r_n = \text{konst}$ und $R = \text{konst}$)[2]. Die Strömung in diesem

[1] Die unter 5 geschilderte Bildung des Nabentotwassers wurde bei Untersuchungen von Drallströmungen in Turbinenhohlräumen oft beobachtet. Eine ausführliche Beschreibung dieser Erscheinung findet man zum Beispiel in der Abhandlung von *F. Busmann*, Arbeitsströmung einer Propellerturbine, S. 12 bis 16. VDI-Verlag 1931.

Die physikalischen Grundlagen der Bildung des Nabentotwassers sind von *K. Bammert* und *H. Kläukens*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 367, ausführlich geschildert. Dort werden die Drallströmungen analysiert, welche zwischen den koaxialen, zylindrischen Wänden hinter einem Leitapparat entstehen, wobei vorausgesetzt wird, daß die axiale Geschwindigkeitskomponente der Drallströmung über der zur Achse des Hohlraumes senkrechten Ebene gleichförmig verteilt ist [Gl. (40), S. 383 der o. a. Abhandlung].

Unter 4 haben wir gezeigt, daß die Verteilung $c_m(r)$ im wesentlichen von der Drallverteilung und von der Bauart des Turbinenhohlraumes abhängt.

Die unter 5 angeführten Schlußfolgerungen über die Bildung des Nabentotwassers im Übergangsraum der Wasserturbinen stimmen qualitativ mit den Ergebnissen von *K. Bammert* völlig überein [vgl. auch *K. Bammert*, Z. VDI 92 (1950), S. 783]. Sie können sich quantitativ unterscheiden, weil die unter 5 gezeigte Methode den dreidimensionalen Charakter der Strömung näher berücksichtigt.

[2] Hinter dem Übergangsraum ist kein Drosselorgan vorhanden.

Rotationshohlraum wurde für zwei Leitapparatöffnungen ($a_0 = 30$ mm und $a_0 = 25$ mm) rechnerisch ermittelt und durch einen Versuch nachgeprüft. Aus der Formel (4) erhalten wir für drallfreie ($c_{0u} = 0$ und also $c'_{1x} = 0$) Zuströmung

$$\Delta c'_x = \frac{\Gamma'}{t} = c'_y \frac{p\,a\cos\beta + b\sqrt{\frac{a^2}{16}\cos^2\beta + p^2 - \frac{b^2}{16}}}{2\left(p^2 - \frac{b^2}{16}\right)}$$

oder

$$\Gamma' = c'_y M\,, \tag{27}$$

wobei M nur von der Bauart bzw. der Öffnungsweite a_0 des Leitapparates und nicht von der Durchflußmenge (c'_y) abhängt.

Aus der Gleichung (15) erhalten wir für $c'_{1x} = 0$ die Zirkulation um eine jede Leitschaufel in der betreffenden Stromschicht

$$\Gamma \approx \sum_1^n \Delta\Gamma' \frac{m'}{m} = K M c'_y, \tag{28}$$

wobei der Beiwert

$$K = \sum_1^n \frac{\Delta\Gamma'}{\Gamma'} \frac{m'}{m}$$

nicht nur von der Bauart des Leitapparates bzw. des geraden Gitters, sondern auch von der Durchflußmenge abhängt, weil die Zirkulationsverteilung längs der Profilsehne des geraden Gitters von der Größe des Anstellwinkels abhängig ist.

Da bei Beginn der Berechnung nur die Stromlinien der meridionalen Potentialströmung ($c_u r = 0$) bekannt sein können, ist es zweckmäßig, die Stromflächen bzw. die Stromschichten zunächst dem Bild der Potentialströmung zu entnehmen.

Die konforme Abbildung der Leitschaufeln wurde nach der Gleichung (7) für $R = 0{,}2$ durchgeführt. Für die Berechnung wurden die Stromlinien Nr. 3, 6, 11, 16, 21 und 25 angenommen, wobei die zwischen zwei Stromflächen f_{k+1} und f_k fließende Wassermenge gleich $Q/25$ ist.

Die konformen Abbildungen der auf den genannten sechs Stromflächen liegenden Leitschaufelprofile stellen in der (x, y)-Ebene sechs gerade, unendliche Schaufelgitter dar. Die Auftriebzahl dieser Gitter $c_{ag} = a\,\alpha + b$ wurde unter Berücksichtigung der Schaufelform ermittelt. An Hand dieser Ergebnisse wurde die von den Gitterschaufeln nicht gestörte Strömung (c'_∞) errechnet und die Zirkulationsverteilung $\Gamma'(l)$ längs der Profilsehne l ermittelt[1].

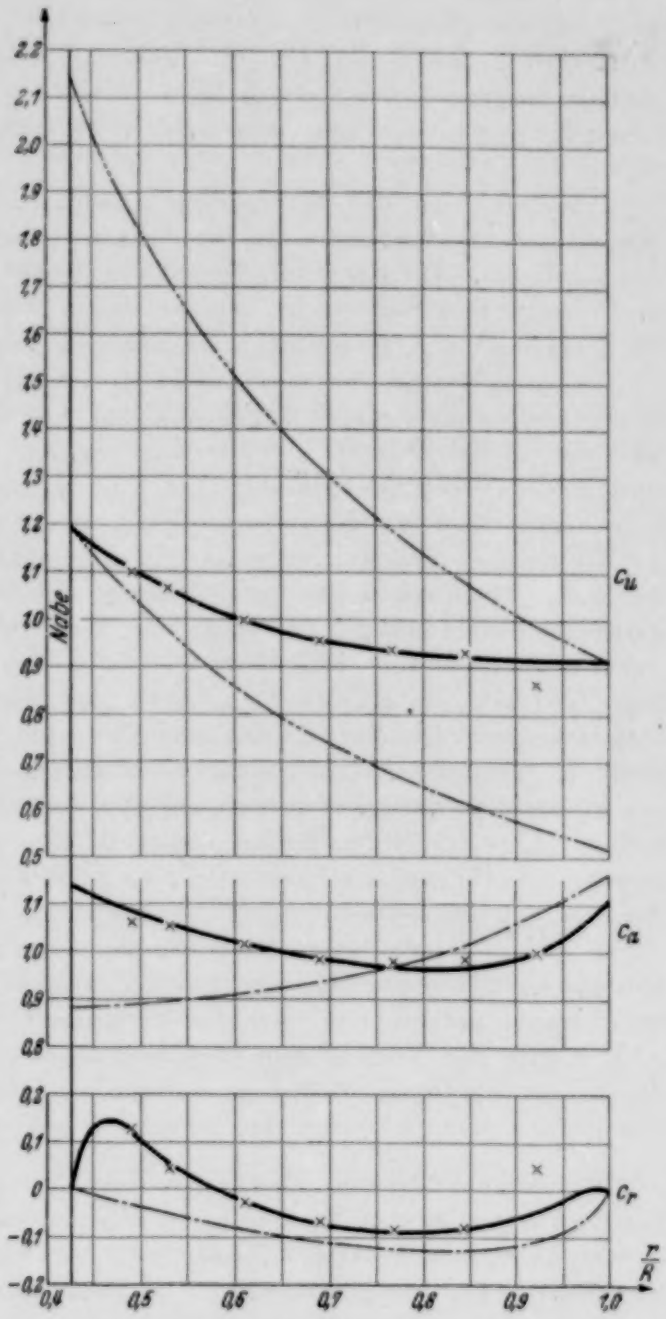

Abb. 6. Geschwindigkeitskomponenten c_u, c_a und c_r in der Meßebene ($a_0 = 25$ mm)

Der Verlauf der Zirkulation längs der Leitapparatbreite wurde dann nach der Gleichung (28) errechnet. Dadurch wurde auch die Zirkulationsverteilung für eine beliebige Normallinie b im Rotationshohlraum hinter dem Leitapparat ermittelt.

Die Umströmung der Innenwand wurde nach (26) geprüft, wobei der Beiwert $\varkappa$ in erster Annäherung dem Strombild der Potentialströmung entsprach. Diese Berechnung wurde auf

[1] Es besteht die Absicht, über die Methode der Berechnung von geraden Gittern, deren Schaufeln praktisch beliebige Form haben, in einer anderen Abhandlung zu berichten.

eine Normallinie bezogen, die etwas weiter als die Meßebene hinter dem Übergangsraum liegt. Für die größere Leitapparatöffnung ($a_0 = 30$ mm) hat sich ergeben, daß $r_n > r_i$ ist, und folglich kein Totwasser entsteht.

Die Berechnung der c_m-Verteilung wurde in erster Annäherung auf die Normallinien der Potentialströmung bezogen und nach (19) und (21) durchgeführt. Die aus dieser Rechnung erhaltenen Stromlinien l_m liegen etwas näher zu der Turbinenachse als die entsprechenden Stromlinien der Potentialströmung.

An Hand dieses Strombildes wurde die Berechnung wiederholt und sowohl die Stromlinien als auch die Zirkulationsverteilung $\Gamma(B)$ entsprechend korrigiert. Die Ergebnisse der zweiten Annäherung haben sich von der ersten Annäherung so wenig unterschieden, daß sich weitere Annäherungen erübrigten. In Abb. 3 werden die in zweiter Annäherung erhaltenen Stromlinien l_m durch Vollinien bezeichnet. Die Strichlinien entsprechen der Potentialströmung ($c_u r = 0$).

Die Ergebnisse der Berechnung wurden mit den Versuchsergebnissen verglichen. Die Messungen der drei Komponenten der lokalen Geschwindigkeit wurden in der „Meßebene" (Abb. 3) durchgeführt. Auf der Abb. 4 wird der Verlauf von drei Geschwindigkeitskomponenten c_u, c_a und c_r graphisch dargestellt, welche durch Division durch die mittlere axiale Geschwindigkeit im betreffenden Querschnitt dimensionslos gemacht sind.

Die errechneten Werte sind durch Vollinien dargestellt. Die mit Kreuzen bezeichneten Werte stellen die Versuchsergebnisse dar. Um den Unterschied zwischen der Potentialströmung und der wirbelbehafteten Strömung deutlich zu zeigen, wurden sowohl die Komponenten c_a und c_r der Potentialströmung ($c_u r = 0$) als auch die Geschwindigkeit c_u des Potentialwirbels ($c_u r =$ konst.) ermittelt und auf der Abb. 4 durch Strichpunktlinien bezeichnet[1].

Als zweites Beispiel betrachten wir die Strömung, die im betreffenden Turbinenhohlraum bei einer kleineren Leitapparatöffnung auftritt. Es wurde $a_0 = 25$ mm angenommen. Die Zirkulationsverteilung $\Gamma(B)$ längs der Breite B des Leitapparates wurde nach der Methode ermittelt, die im ersten Zahlenbeispiel ausführlich beschrieben ist. Die Nachprüfung der Strömung nach (26) hat gezeigt, daß $r_i > r_n$ ist, und folglich die Bildung des Nabentotwassers sicher zustande kommt. Die Berechnung nach (26) ergab in erster Annäherung den Wert von r_i, mit dessen Hilfe die Trennfläche schätzungsweise aufgezeichnet wurde. Die Strömung im Rotationshohlraum zwischen dem Totwasser und der Außenwand wurde dann untersucht und die c_m-Verteilung längs der Normallinien ermittelt. Das Strombild wurde entsprechend korrigiert und in zweiter Annäherung nachgeprüft. Das Ergebnis der zweiten Annäherung konnte als endgültiges Strombild betrachtet werden. Die Form des Nabentotwassers wurde nach (23) ermittelt.

In Abb. 5 ist das in zweiter Annäherung erhaltene Strombild dargestellt. Die der wirbelbehafteten Strömung entsprechenden Stromlinien l_m sind durch Vollinien bezeichnet. Die Strichlinien entsprechen, wie im Zahlenbeispiel Nr. 1, der Potentialströmung ($c_u r = 0$). In Abb. 6 wird der Verlauf von drei dimensionslosen Komponenten der lokalen Geschwindigkeit dargestellt, die in der Meßebene auftreten. Aus Abb. 4 und 6 folgt, daß die errechneten und die gemessenen Komponenten der lokalen Geschwindigkeit sehr gut zusammenfallen.

7. Zusammenfassung. Das angenäherte Verfahren erlaubt nicht nur eine ausführliche Analyse der dreidimensionalen Strömung im Übergangsraum der schnellaufenden Wasserturbinen, sondern auch eine rechnerische Ermittlung der Form des Nabentotwassers. Aus dem Vergleich der errechneten und der gemessenen Geschwindigkeiten folgt, daß die nach dem angenäherten Verfahren errechneten Strömungen im Turbinenhohlraum mit den wirklichen Strömungen völlig übereinstimmen. Es ist also durchaus möglich, die angenäherte Methode statt einer exakten Analyse für die Ermittlung der Strömung im Übergangsraum der Wasserturbinen anzuwenden und dadurch die Rechenarbeit ohne Einbuße an Genauigkeit wesentlich zu verkürzen. Es ist einleuchtend, daß der Anwendung dieses Verfahrens zur Berechnung anderer Strömungsmaschinen (Gebläse, Pumpen usw.) nichts im Wege steht.

(Eingegangen am 23. Februar 1951.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *M. Strscheletzky*, Friedrichhafen, Ernst-Lehmann-Str. 21.

[1] Die zwei c_u-Kurven des Potentialwirbels, die in Abb. 4 dargestellt sind, entsprechen den Γ-Werten der Wirbelbehafteten Strömung an den Wänden des Turbinenhohlraumes.

Technische Schwingungslehre. Von Dr.-Ing. **Karl Klotter** o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Zweite, umgearbeitete und ergänzte Auflage.

Erster Band: **Einfache Schwinger und Schwingungsmeßgeräte.** Mit 360 Abbildungen. XVI, 399 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 46.50

Inhaltsübersicht: Erster Teil. **Kinematik des einfachen Schwingers, allgemeine Schwingungslehre:** Allgemeines. — Harmonische Schwingungen. — Verwandte Schwingungen. — Harmonische Analyse. — Zweiter Teil. **Kinetik des einfachen Schwingers: A. Freie, ungedämpfte Schwingungen des einfachen Schwingers mit gerader Kennlinie.** Aufstellung und Integration der Bewegungsgleichung, harmonische Schwingungen, Übersicht. — Die Pendel. — Die elastischen Schwinger. — Die Energie in der freien Schwingung. — Schwinger mit besonderen Eigenschaften. — **B. Freie, gedämpfte Schwingungen des einfachen Schwingers mit gerader Kennlinie.** — **C. Freie, ungedämpfte Schwingungen des einfachen Schwingers mit nichtgerader Kennlinie.** — **D. Erzwungene Schwingungen des einfachen Schwingers mit gerader Kennlinie.** — Ungedämpfte Schwinger. — Schwinger mit geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskräften. — Schwinger mit anderen Dämpfungskräften. — **E. Schwingungsmessung und Schwingungsmeßgeräte.** — Vorbemerkungen. — Messung periodisch verlaufender Kräfte mit Federkraftmessern. — Messung periodischer Bewegungen mit Geräten ohne Festpunkt. — Messung periodischer Bewegungen durch Geräte mit Festpunkt. — Rückblick auf die Messung periodischer Einwirkungen. — Kraftmessung und Bewegungsmessung bei nicht-periodischer Einwirkung. — Praktische Gesichtspunkte für den Aufbau und das Arbeiten der Schwingungsmeßgeräte. — **F. Erzwungene Schwingungen des einfachen Schwingers mit nicht-gerader Kennlinie.** — **G. Rheolineare Schwinger.** — Bewegungsgleichungen und Beispiele. — Lösungen der Bewegungsgleichungen; die Stabilität der Bewegung. — **H. Das Anlaufen eines Schwingers.** — **I. Selbsterregte Schwingungen.** — Namen- und Sachverzeichnis.

Statt des erwarteten zweiten Bandes erscheint zunächst der erste Band in neuer Auflage. Die Veränderungen, die der vorliegende erste Band bei der Neubearbeitung erfahren hat, betreffen vor allem den Umfang des behandelten Stoffes. So ist — wie auch der Titel anzeigt — der wesentliche Inhalt des kleinen Werkchens über Schwingungsmessung und Schwingungsmeßgeräte, das im Jahre 1943 als eine Art Ergänzung des ersten Bandes erschienen war, in abgewandelter und ergänzter Form nun hier mit aufgenommen. Sonst ist noch erwähnenswert die Aufnahme eines Kapitels über „rheolineare Schwinger", das sind Schwinger, deren Bewegungsgleichungen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten sind.

Der zweite Band, dessen Erscheinen lange verzögert wurde, soll nun bald folgen. Er wird die Schwingungen der Systeme mit mehreren (aber endlich vielen) Freiheitsgraden, die sog. „Koppelschwingungen" behandeln.

Momenten-Einflußzahlen für Durchlaufträger mit beliebigen Stützweiten. Von Dr.-Ing. **H. Graudenz.** Mit 80 Zahlentafeln u. 14 Abbildungen. IV, 90 Seiten. 1951. DM 7.50

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Zahlenbeispiele. — Einspannmomente. — Übersicht über die Tafeln. — Tafel für Zweifeldträger (Tafel 1). — Tafeln für Dreifeldträger (Tafel 2—16). — Tafeln für Vierfeldträger (Tafeln 17—80).

Es besteht ein ausgesprochener Mangel an einem Tabellenbuch, das die schnelle und genaue Berechnung der Momente auch bei ganz beliebigen Stützweitenverhältnissen erlaubt.
Die bisherigen Tabellenbücher für Durchlaufträger haben dadurch nur einen begrenzten Anwendungsbereich, daß sie die Momente für eine gewisse Zahl ausgewählter, meist symmetrischer Stützweitenverhältnisse angeben und schon bei geringen Abweichungen von diesen Verhältnissen sehr ungenaue Ergebnisse liefern.

Mit diesen neuen Tafeln können die Stützenmomente jedes beliebigen Durchlaufträgers nach der Ermittlung der Belastungswerte sofort hingeschrieben werden. Die Tafeln enthalten für die betreffende Felderzahl sämtliche möglichen Verhältnisse der reduzierten Stützweiten von 1 : 1 bis 1 : 2 in den Abstufungen 1 : 1,2, 1 : 1,4 . . . , sowie für Zwei- und Dreifeldträger die Verhältnisse von 1 : 2 bis 1 : 3 in den Abstufungen 1 : 2,25, 1 : 2,5 usw.

Die Einflußzahlen der Tafel gelten für jede beliebige Belastung, ferner sind für den am häufigsten vorkommenden Fall der gleichmäßig verteilten Last die Momentenbeiträge aus den einzelnen Feldern bereits ausgerechnet, so daß die Belastungswerte hierfür nicht erst bestimmt zu werden brauchen. Die Berücksichtigung von Einspannungen und Kragarmen an den Enden ist ohne weiteres möglich. Auch für Träger über 4 Felder führt die Benutzung der Tafelwerte mit geringstem Rechenaufwand zu genauen Ergebnissen.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Analyse der Metalle. Herausgegeben vom Chemiker-Fachausschuß der Gesellschaft Deutscher Metallhütten- und Bergleute e. V. Leiter: Dr.-Ing. **O. Proske** und stellv. Leiter Prof. Dr. **H. Blumenthal.**

Erster Band: **Schiedsverfahren.** Zweite Auflage. Mit 25 Textabbildungen. VIII, 508 Seiten. 1949. DM 36.—; Halbleinen DM 38.40

Inhaltsübersicht: Einleitung: Begriffsbestimmung und allgemeine Richtlinien für Schiedsuntersuchungen. 1. Aluminium. 2. Antimon. 3. Arsen. 4. Beryllium. 5. Blei. 6. Bor. 7. Cadmium. 8. Cer und Thorium. 9. Chrom. 10. Edelmetalle. 11. Indium. 12. Kobalt. 13. Kupfer. 14. Magnesium. 15. Mangan. 16. Molybdän. 17. Nickel. 18. Quecksilber. 19. Selen und Tellur. 20. Silicium. 21. Tantal und Niob. 22. Thallium. 23. Titan. 24. Uran. 25. Vanadium. 26. Wismut. 27. Wolfram. 28. Zink. 29. Zinn. 30. Zirkonium. Namen- und Sachverzeichnis.

Das vorliegende Werk entstand als Gemeinschaftsarbeit von etwa 60 Chemikern, die im „Chemiker-Fachausschuß der Gesellschaft Deutscher Metallhütten- und Bergleute e. V." zusammengeschlossen sind und die als Fachleute auf dem Gebiete der Analyse der in dem Buche angeführten mehr als 30 Metalle anzusehen sind. Die Standardanalysen, die in dem Werke eingehend beschrieben sind, kann man als Normen bezeichnen, soweit solche bei Analysenverfahren überhaupt möglich sind. Als „*Schiedsverfahren*" werden grundsätzlich solche Arbeitsvorschriften für die Analyse betrachtet, die ohne Rücksicht auf den damit verbundenen Zeitaufwand besonders zuverlässige Ergebnisse gewährleisten.

Materialprüfung mit Röntgenstrahlen unter besonderer Berücksichtigung der Röntgenmetallkunde. Von Dr. **Richard Glocker,** Professor für Röntgentechnik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Dritte, erweiterte Auflage. Mit 349 Abbildungen. VIII, 440 Seiten. 1949. Ganzleinen DM 58.—

Das Anwendungsgebiet der Röntgenstrahlen als Hilfsmittel bei der Materialprüfung hat einen gewaltigen Ausbau erfahren. Es hat sich zu einer praktisch wertvollen und unentbehrlich gewordenen Untersuchungsmethode ausgebildet und weitgehend Eingang in der Industrie gefunden. Das sorgfältige und von grundlegenden Forschungsarbeiten getragene Buch bildet ein Standardwerk der Röntgenmaterialprüfung. — Seit dem Erscheinen der letzten Auflage hat sich die Werkstoffprüfung mit Röntgenstrahlen weiterhin außerordentlich entwickelt. Ganz umgearbeitet wurden daher die Abschnitte über Grobstrukturuntersuchung, Röntgenlinienverbreiterung und Spannungsmessung. Hinzugekommen ist eine Darstellung der Atomanordnungen in amorphen festen Stoffen und in Flüssigkeiten, insbesondere in Metallschmelzen. Die Tabellen wurden auf den neuesten Stand gebracht. Wie in den früheren Auflagen liegt das Schwergewicht auf der Beschreibung der Anwendungsweise der Verfahren an Hand von praktischen Beispielen, damit der Zweck des Buches erreicht wird, den Leser zu befähigen, selbst die einzelnen Verfahren auszuführen.

Die thermodynamischen Eigenschaften der Metalloxyde. Ein Beitrag zur theoretischen Hüttenkunde. Von Dr.-Ing. **Werner Lange,** Professor für Metallhüttenkunde an der Bergakademie Freiberg. Mit 16 Abbildungen. V, 107 Seiten. 1949. DM 12.—

Die Schrift ist in erster Linie für den Metallurgen gedacht, der sich im besonderen Maße für die Chemie der hohen Temperaturen interessieren muß. Die Ableitung der Rechnungsmethoden ist verhältnismäßig eingehend behandelt worden, damit auch der nicht geübte, jedoch mit den Grundlagen der Thermodynamik vertraute Leser in der Lage ist, ohne weiteres Literaturstudium die Schrift durcharbeiten zu können. Der Aufwand an Mathematik beschränkt sich auf die einfachen Grundregeln der Differentiation und Integration, so daß auch von dieser Seite aus das Verständnis nicht erschwert wird.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen drei Prospekte des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. 57 275 4022 0,8 K. B./Z. 040